

引文格式:曹雪峰,万刚,张宗佩.Hilbert 曲线层级演进关系[J].测绘学报,2016,45(S1):77-84. DOI:10.11947/j.AGCS.2016.F009.  
CAO Xuefeng, WAN Gang, ZHANG Zongpei. Hilbert Curve Hierarchical Evolution Relationship[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2016, 45(S1): 77-84. DOI: 10.11947/j.AGCS.2016.F009.

# Hilbert 曲线层级演进关系

曹雪峰<sup>1</sup>, 万 刚<sup>1</sup>, 张宗佩<sup>2</sup>

1. 信息工程大学地理空间信息学院, 郑州 450052; 2. 95989 部队, 北京 100076

## Hilbert Curve Hierarchical Evolution Relationship

CAO Xuefeng<sup>1</sup>, WAN Gang<sup>1</sup>, ZHANG Zongpei<sup>2</sup>

1. Institute of Geospatial Information, Information Engineering University, Zhengzhou 450052, China; 2. Troops 95989, Beijing 100076, China

**Abstract:** Grid code algebra is the difficult of current global spatial grid research, and it is the theoretic basis for the development from data organization framework to the new generation of spatial analysis model. Hilbert curve has been an important tool in the global spatial grid code design. In this paper, the octree grid code is based on Hilbert curve, then Hilbert curve hierarchical evolution relationship table is presented, which is used to design some grid code algebra operator. This work provides a reference for the construction of global spatial grid analysis theory and methods.

**Key words:** Hilbert Curve; Grid Code Algebra; Global Spatial Grid; Octree

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China (Nos. 41371384; 41491465)

**摘 要:** 网格编码代数是当前全球空间网格研究中的难点,也是推动全球空间网格从数据组织管理框架发展成为新一代空间分析模型的理论基础。Hilbert 曲线是设计全球空间网格单元编码的重要工具。本文以 Hilbert 曲线序列码作为八叉树立体网格单元的唯一编码,由 Hilbert 曲线数学性质推导得到网格单元 Hilbert 码的层级演进关系表,进而设计了用于网格编码代数运算的若干操作算子,为构建全球空间网格分析理论与方法提供参考。

**关键词:** Hilbert 曲线; 网格编码代数; 全球空间网格; 八叉树

**中图分类号:** P208      **文献标识码:** A      **文章编号:** 1001-1595(2016)S1-0077-08

**基金项目:** 国家自然科学基金(41371384;41491465)

全球空间网格将地球空间离散化为各个剖分等级的网格单元,为每一个网格单元建立全球唯一的网格编码,以网格单元为基础实现全球空间信息的统一组织,为全球范围的空间数据管理、空间信息分析、空间问题建模提供统一框架<sup>[1]</sup>。按照网格剖分对象,全球空间网格可分为球面网格和球体网格。常见的球面网格包括球面正多面体网格<sup>[2]</sup>、球面 Voronoi 网格<sup>[3]</sup>、混合式球面网格<sup>[4]</sup>等。常见的球体网格包括阴阳网格<sup>[5]</sup>、立方体网格<sup>[6]</sup>、球体退化八叉树网格<sup>[7]</sup>、圈层立体网格<sup>[8]</sup>等。

利用空间填充曲线的降维和聚簇性,设计高效的网格单元编码算法,是全球离散网格领域的一个重要研究方向<sup>[1]</sup>。文献[9]提出了基于 Hilbert 曲线的全球离散网格影像金字塔索引算

法,文献[10]基于 Z 曲线设计了球体退化八叉树网格的编码算法,文献[8]提出基于 Hilbert 曲线的扩展八叉树剖分网格编码算法,文献[11]将 Hilbert 曲线扩展应用到地月一体圈层立体网格的编码算法中。Hilbert 曲线编码的经典方法是由文献[12]针对二维空间构造提出的。该算法是基于 Morton 码的二进制位操作法,算法复杂度为  $O(n^2)$ 。文献[13]根据 Hilbert 曲线的空间层次分解特征,通过栅格空间层次分解与构造域状态转移向量,设计了二维空间中 Hilbert 码的递归生成算法,算法复杂度为  $O(\max(n))$ 。文献[14]设计了基于状态转移矩阵的 Hilbert 码快速生成算法,将 Hilbert 状态转移矩阵转换为 C++ 中的数组运算,减少了 Hilbert 码计算过程中的

嵌套循环及迭代处理,将算法复杂度降为 $O(n)$ 。上述编码方法都只是在二维空间中进行讨论的。文献[15]研究了 $n$ 维 Hilbert 曲线的生成问题,提出基于静态演化规则、自底向上的生成算法,算法复杂度为 $O(n\log n)$ 。文献[16]设计了任意维空间中具有线性复杂度的 Hilbert 码算法。上述 Hilbert 曲线研究工作主要集中在曲线生成与排列码计算方面,对全球离散网格数据索引设计与优化发挥重要作用。但是,以 Hilbert 码为基础的网格编码计算分析研究却鲜见报导。

随着网格剖分模型研究的深入,全球空间网格已经在地球系统模拟器、全球气候变化、公众地理信息服务等科学研究和经济社会的诸多领域得到应用。但是,全球空间网格不仅仅是一种空间数据组织管理框架,而且将发展成为新一代空间分析模型。网格编码代数是这一发展过程中重要的理论推动<sup>[17]</sup>。在网格编码上构建代数运算法则,将传统上复杂耗时的空间坐标计算转换为网

格编码的代数运算,不仅给很多算法带来效率上的显著提升,还将为空间分析带来新的模型和方法。这一点已经在遥感图像处理<sup>[17]</sup>等领域出露端倪。

本文首先基于 Hilbert 曲线设计八叉树立体网格单元编码,然后研究 Hilbert 曲线层级演进关系的计算方法,最后给出用于网格编码代数运算的 Hilbert 曲线网格编码若干操作算子。

1 八叉树立体网格 Hilbert 编码

对于八叉树结构的立体网格,可采用“行向编号-列向编号-径向编号”结构设计网格单元编码,简称“行列高”(I,J,K)码。若剖分层次为 $N$ ,则八叉树立体网格的大小为 $2^N \times 2^N \times 2^N$ ,可对其中的每一个网格单元赋予3维 $N$ 阶 Hilbert 编码作为唯一网格编码。图 1 给出了3维1阶、2阶 Hilbert 编码与网格空间的对应关系。表 1 所示为3维1阶 Hilbert 编码顺序及其对应二进制码与空间坐标(I,J,K)关系。

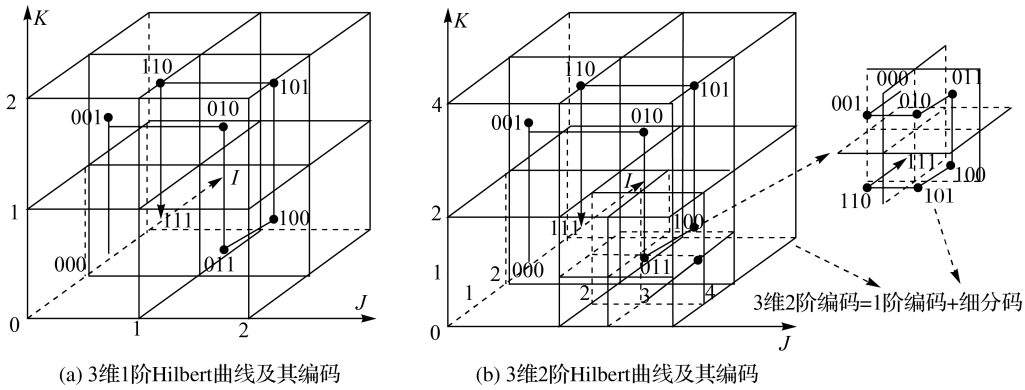


图 1 3 维 1 阶、2 阶 Hilbert 编码与对应网格空间关系

Fig.1 3D 1 and 2 order Hilbert code and its corresponding grid space

表 1 3 维 1 阶 Hilbert 曲线与(I,J,K)对应表

Tab.1 3D 1 order Hilbert curve and its corresponding (I,J,K)

Hilbert 序列码	二进制码	I	J	K
0	000	0	0	0
1	001	0	0	1
2	010	0	1	1
3	011	0	1	0
4	100	1	1	0
5	101	1	1	1
6	110	1	0	1
7	111	1	0	0

3 维 2 阶 Hilbert 曲线是将 3 维 1 阶 Hilbert 曲线的节点网格空间进行再次细分得到的,如图 1(b)所示,其对应得编码等于“1 阶编码+细

分编码”。例如 3 维 1 阶 Hilbert 曲线序列码为 3(011)的网格被细分后获得对应 3 维 2 阶 Hilbert 编码如表 2 所示。

表 2 部分 3 维 2 阶 Hilbert 曲线与(I,J,K)对应表

Tab.2 3D 2 order Hilbert curve and its corresponding (I,J,K)

Hilbert 序列码	二进制码	I	J	K
24	011000	1	2	1
25	011001	0	2	1
26	011010	0	3	1
27	011011	1	3	1
28	011100	1	3	0
29	011101	0	3	0
30	011110	0	2	0
31	011111	1	2	0

根据 3 维 1 阶、2 阶 Hilbert 编码生成过程,可以从图形结构上发现 Hilbert 编码的两个层级之间的关系为

$$H_{N+1}^2 = H_N^2 + H_1^{2'} \quad (1)$$

式中,  $H_{N+1}^2$  表示 3 维  $N+1$  阶 Hilbert 编码的二进制形式;  $H_N^2$  表示 3 维  $N$  阶 Hilbert 编码的二进制形式;  $H_1^{2'}$  表示该立体网格单元细分 1 次后的子单元 Hilbert 编码(二进制形式)。因此, Hilbert 曲线序列码随剖分层级的变化中包含了父级与子级网格单元之间的空间关系,为基于网格编码构建代数运算法则,进而实现网格空间分析提供了可能的途径。

## 2 Hilbert 曲线的层级演进关系

下面在分析 Hilbert 曲线生成过程中,由 Hilbert 曲线数学性质推导分析  $N$  阶与  $N+1$  阶 Hilbert 曲线序列码之间的关系。

### 2.1 Hilbert 曲线地址

编码空间限定为  $M(M \geq 2)$  维欧拉空间  $\mathbf{R}^M$ , 与其对应的是  $M$  维  $N$  阶 Hilbert 曲线  $H_N^M$ 。

用  $S_a^{N,M}$  表示一个  $M$  维超立方体,其中  $N$  为剖分等级,  $a$  表示该超立方体的地址。初始超立方体未进行剖分,则  $N=0, a=0$ , 记为  $S_0^{0,M}$ 。在每个维度上对  $S_0^{0,M}$  进行  $N$  次二等分,得到子超立方体集合  $\{S_a^{N,M}\}$ 。设  $S_0^{0,M}$  各个边长相等且均为单位长度 1, 则  $S_0^{0,M}$  和  $S_a^{N,M}$  的体积分别为 1 和  $(1/2^N)^M$ , 即是  $S_0^{0,M}$  由  $2^{NM}$  个  $S_a^{N,M}$  组成。

考虑到  $M$  维欧拉空间  $\mathbf{R}^M$  与 1 维 Hilbert 曲线之间映射是一一映射,则有

$$S_a^{N,M} \cap S_{a'}^{N,M} = \emptyset \quad \text{当且仅当 } a \neq a' \quad (2)$$

Hilbert 曲线具有自相似的层次结构,因此当把某一个  $S_a^{N,M}$  再细分 1 次时,得到  $2^M$  个子单元,每个子单元的地址可由两部分二进制段衔接起来,第 1 部分是  $a$ , 第 2 部分是第  $i$  个子单元在  $S_a^{N,M}$  中的相对位置,记为  $b_i$ 。可得

$$\bigcup_{i=1}^{2^M} S_{ab_i}^{N+1,M} = S_a^{N,M} \quad (3)$$

式中,  $b_1, b_2, \dots, b_{2^M}$  是一个  $M$  位二进制数,且满足当  $i \neq j$  时  $b_i \neq b_j$ 。

### 2.2 Hilbert 曲线起点和终点

Hilbert 曲线起点和终点必须经过“垂直”子超立方体。“垂直”子超立方体是指其中包含  $S_a^{N,M}$  的任意一个顶点的子超立方体。集合  $\{S_a^{N,M}\}$  中有且仅有  $2^M$  个“垂直”子超立方体,每

个“垂直”子超立方体都可以作为 Hilbert 曲线的起始点。对于每一个起始点,存在  $M$  个对应的终点,且起点和终点是相互邻近的。因此, Hilbert 曲线所有起始点和终点组合的数量是  $M \times 2^M$ 。

“垂直”子超立方体可被分为  $A$  和  $B$  两类。 $A$  类是指包含  $M$  个 0 的一组,其余为  $B$  类。由于 Hilbert 曲线的起点和终点是相互邻近的,若起点在  $A$  类中,则终点在  $B$  类中,反之亦然。例如,当  $M=3$  时,一条 Hilbert 曲线的起点和终点可以是  $A = \{000, 011, 110, 101\}$ ,  $B = \{001, 010, 111, 100\}$ 。因此,在研究 Hilbert 编码层级关系过程中,只关心起点位于  $A$  类中的 Hilbert 曲线,故 Hilbert 曲线数量减少至  $M \times 2^{M-1}$ 。

### 2.3 Hilbert 曲线地址列表

为了标识不同起点终点的 Hilbert 曲线,使用  $\varphi_l^{N,M}(h)$  表示第  $l$  条 Hilbert 曲线序列码  $h$  对应的  $S_a^{N,M}$  的地址,其中  $l=1, 2, \dots, M \times 2^{M-1}$ 。

$M$  维空间第 1 条 1 阶 Hilbert 曲线上各个地址形成的列表  $\varphi_1^{1,M}$  可以从式(4)所示的递推公式计算得到

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{1,1} &= (0, 1) \\ \varphi_1^{1,M} &= (0\varphi_1^{1,M-1}, 1\tilde{\varphi}_1^{1,M-1}) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中,  $0\varphi_1^{1,M-1}$  表示二进制“0”与  $\varphi_1^{1,M-1}$  的连接,  $\tilde{\varphi}_1^{1,M-1}$  表示对应的二进制位反转(即 0 变为 1, 1 变为 0)。例如,  $\varphi_1^{1,3} = \{000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100\}$  是 3 维 1 阶第 1 条 Hilbert 曲线对应的地址列表。

下面将分 3 步确定其他 Hilbert 曲线对应的地址码  $\varphi_l^{1,M}(l=2, \dots, M2^{M-1})$  列表。

#### (1) 确定起始点地址

Hilbert 曲线集合  $\varphi_l^{N,M}(h)(l=1, 2, \dots, M2^{M-1})$  符合性质 1;  $\varphi_l^{1,M}(1)$  和  $\varphi_l^{1,M}(2^M)$  的汉明距离(二进制位不同的个数)等于 1, 且  $\varphi_l^{1,M}(1)$  和  $\varphi_{l'}^{1,M}(1)(l \neq l')$  的汉明距离必然是偶数<sup>[18]</sup>。

为了确定哪些  $\varphi_l^{1,M}(l=2, \dots, M2^{M-1})$  满足上述性质,将 Hilbert 曲线序列码  $H$  为奇数的  $\varphi_l^{N,M}(h)$  地址列表组成一个集合,例如  $\varphi_1^{1,M}(1), \varphi_1^{1,M}(3), \dots, \varphi_1^{1,M}(2^{M-1})$ 。由于它们之间的汉明距离是偶数,因此将其放到一起构成一个集合,即前面所说的类型 A。考虑到一个 Hilbert 曲线起点对应的终点数量是  $M$ , 可以使  $\varphi_2^{1,M}(1), \varphi_3^{1,M}(1), \dots, \varphi_M^{1,M}(1)$  表示与  $\varphi_1^{1,M}(1)$  具有相同起点。同样,  $\varphi_{M(s-1)+1}^{1,M}(1), \varphi_{M(s-1)+2}^{1,M}(1), \dots,$

$\varphi_{M(s-1)+M}^{1,M}(1)$ 具有与  $\varphi_1^{1,M}(2s-1)$ 相同的起点,其中  $s=2,3,\dots,2^{M-1}$ 。这样就能确定所有 Hilbert 曲线的起始点地址。

## (2) 确定终点地址

$\varphi_2^{1,M}(2^M), \dots, \varphi_M^{1,M}(2^M), \dots, \varphi_{M2^{M-1}}^{1,M}(2^M)$  的终点地址可以从各自的起点地址计算得到。对于每一个起始点地址  $\varphi_1^{1,M}(1) = \varphi_2^{1,M}(1) = \dots = \varphi_M^{1,M}(1)$ , 其与相应的终点地址汉明距离等于 1。例如,  $\varphi_1^{1,M}(1) = 000\dots 0$  ( $M$  位二进制数, 都是 0), 则对应的终点地址为  $100\dots 0, 010\dots 0, 001\dots 0, \dots, 000\dots 1$  ( $M$  位二进制数, 只有一位是 1, 其他均是 0)。将这些终点地址分别指定给  $\varphi_1^{1,M}(2^M), \varphi_2^{1,M}(2^M), \dots, \varphi_M^{1,M}(2^M)$ 。总之, 可以通过对  $M$  位二进制数的一个二进制位进行置反计算对应的终点地址。定义该运算函数为  $\text{InvertBit}(a, m)$ , 其含义是将  $a$  对应的地址 ( $M$  位二进制数) 的第  $m$  位 (从高位到低位计数) 置反。因此, 可将终点地址计算用如下函数表达

$$\varphi_{M(s-1)+m}^{1,M}(2^M) = \text{InvertBit}(\varphi_{M(s-1)+m}^{1,M}(1), m) \quad (5)$$

式中,  $s=1, 2, 3, \dots, 2^{M-1}; m=1, 2, \dots, M$ 。

## (3) 确定起点和终点之间其他地址的顺序

起点地址集合  $\{\varphi_l^{1,M}(1)\}$  和终点地址集合  $\{\varphi_l^{1,M}(2^M)\}$  中的对应元素分别作为第  $l$  条 Hilbert 曲线的起点和终点, 则第  $l$  条 Hilbert 曲线剩余点的地址集合为  $\{\varphi_l^{1,M}(h) \mid h=2, 3, \dots, 2^M-1\}$ 。

下面以 2 维和 3 维网格空间为例 (图 2), 讨论给定 Hilbert 曲线起点和终点情况下剩余点的地址顺序集合。在 2 维网格空间中, 若指定 00 和 01 分别是 Hilbert 曲线的起点和终点, 则其对应的 Hilbert 曲线路径只有一条 (00, 10, 11, 01)。在 3 维网格空间中, 若指定 000 和 100 分别是 Hilbert 曲线的起点和终点, 则其对应的 Hilbert 曲线路径有 4 条, 分别为 (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100)、(000, 001, 101, 111, 011, 010, 110, 100)、(000, 010, 011, 001, 101, 111, 110, 100) 和 (000, 010, 110, 111, 011, 001, 101, 100)。因此, 针对每一组起点终点组合, 需要选定一组地址顺序列表, 并将其指定给  $\{\varphi_l^{1,M}(h)\}$ 。

基于  $\varphi_1^{1,M}$  的地址顺序列表, 可采用交换  $X_1$  和  $X_l$  ( $l=2, 3, \dots, M$ ) 两个坐标轴的方法获得的  $\varphi_l^{1,M}$  地址顺序列表。若定义位操作函数  $\text{ExtractBit}(\varphi, m)$  是指提取二进制数  $a$  的第  $m$

位, 则  $\varphi_l^{1,M}$  地址顺序列表的生成操作可以表示为交换  $\text{ExtractBit}(\varphi_1^{1,M}(h), 1)$  和  $\text{ExtractBit}(\varphi_1^{1,M}(h), l)$ 。因此, 生成  $\varphi_l^{1,M}$  ( $l=2, 3, \dots, M$ ) 地址顺序列表的公式为

$$\varphi_l^{1,M}(h) = \begin{cases} \varphi_1^{1,M}(h) \oplus (\varphi_1^{1,M}(2^M) \oplus \varphi_l^{1,M}(2^M)) \\ \varphi_1^{1,M}(h) \end{cases},$$

$$\text{若 } \text{ExtractBit}(\varphi_1^{1,M}(h), 1) \neq \text{ExtractBit}(\varphi_1^{1,M}(h), l) \quad (6)$$

式中,  $h=2, 3, \dots, 2^M-1$  是指 Hilbert 曲线序列码;  $\varphi_1^{1,M}(2^M)$  和  $\varphi_l^{1,M}(2^M)$  是第 1 条和第  $l$  条 Hilbert 曲线的终点地址;  $\oplus$  表示二进制异或运算符。

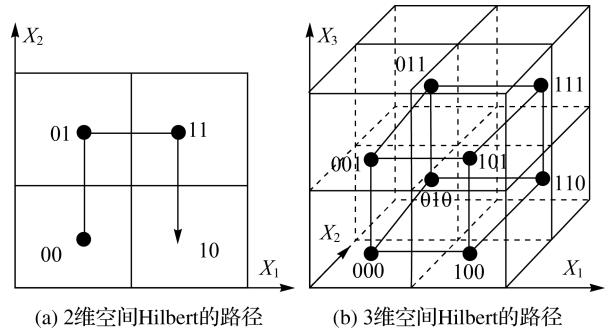


图 2 2 维和 3 维 Hilbert 曲线路径

Fig.2 2D and 3D Hilbert curve path

同样地, 需要确定  $\{\varphi_{M+i}^{1,M}\}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, M$ ) 的地址顺序列表, 其可以根据 Hilbert 曲线如下的性质 2, 从  $\{\varphi_i^{1,M}\}$  计算得到。

Hilbert 曲线符合性质 2<sup>[18]</sup>: 给定一个地址顺序列表  $\varphi_i^{1,M}$  和一个起点地址  $\varphi_{i'}^{1,M}(1)$  ( $\varphi_{i'}^{1,M}(1) \neq \varphi_i^{1,M}(1)$ ), 则新的地址顺序列表  $\varphi_{i'}^{1,M}$  将从  $\varphi_{i'}^{1,M}(h+1) = \varphi_i^{1,M}(h) \oplus (\varphi_i^{1,M}(h) \oplus \varphi_i^{1,M}(h+1))$  ( $h=1, 2, \dots, 2^M-1$ ) 依次计算得到<sup>[18]</sup>。

以  $\varphi_i^{1,M}$  为基础, 可以计算  $\varphi_{M+i}^{1,M}$  的地址顺序列表。重复该过程, 可以根据  $\varphi_{M(s-1)+i}^{1,M}$  计算  $\varphi_{M+i}^{1,M}$  ( $s=2, 3, \dots, 2^{M-1}-1$ )。

## 2.4 Hilbert 曲线初始条件表

在 3 维欧拉空间中, 根据 2.3 节步骤 (1)、(2)、(3) 可以计算 3 维 1 阶 Hilbert 曲线的对应的地址顺序列表 (总共  $3 \times 2^{3-1} = 12$  条)。这 12 条 Hilbert 曲线是获取 3 维  $N$  阶 Hilbert 曲线经过网格点的地址顺序列表的初始条件, 称为初始条件表。实际上, 这 12 条 Hilbert 曲线就是构建 3 维  $N$  阶 Hilbert 曲线的基单元。



$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{1,3} &= (000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100) \\ \varphi_2^{1,3} &= (000, 001, 101, 100, 110, 111, 011, 010) \\ \varphi_3^{1,3} &= (000, 100, 110, 010, 011, 111, 101, 001) \\ \varphi_4^{1,3} &= (110, 100, 101, 111, 011, 001, 000, 010) \\ \varphi_5^{1,3} &= (110, 111, 011, 010, 000, 001, 101, 100) \\ \varphi_6^{1,3} &= (110, 010, 000, 100, 101, 001, 011, 111) \\ \varphi_7^{1,3} &= (101, 111, 110, 100, 000, 010, 011, 001) \\ \varphi_8^{1,3} &= (101, 100, 000, 001, 011, 010, 110, 111) \\ \varphi_9^{1,3} &= (101, 001, 011, 111, 110, 010, 000, 100) \\ \varphi_{10}^{1,3} &= (011, 010, 000, 001, 101, 100, 110, 111) \\ \varphi_{11}^{1,3} &= (011, 010, 110, 111, 101, 100, 000, 001) \\ \varphi_{12}^{1,3} &= (011, 111, 101, 001, 000, 100, 110, 010) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

通过上面研究已经确定一个初始条件表,为了生成不同剖分等级  $N$  的 Hilbert 曲线,还需要研究两个相邻剖分等级之间的关系。

## 2.5 Hilbert 曲线层级演进关系表

初始条件表确定地址顺序列表总体走向,而  $N$  阶和  $N+1$  阶之间的层级演进关系表可以确定子超立方体的分布情况,从而得到完整的 Hilbert 曲线地址顺序列表。 $N$  阶和  $N+1$  阶之间的层级演进关系是通过 1 阶和 2 阶之间的演进层级关系归纳总结而来。在  $M(M \geq 2)$  维欧拉空间  $\mathbf{R}^M$  中,层级演进关系表也描述了两个邻近超立方体的地址  $\varphi_l^{N,M}(h)$  和  $\varphi_l^{N,M}(h+1)$  的连接关系。

在子超立方体  $S_a^{N,M}$  中,采用地址序列  $\{W_i^{n,M}\}(n=1,2,\dots,N-1 \quad i=1,2,\dots,N2^{2N-1})$  对应于第  $l$  条 Hilbert 曲线地址序列集合  $\{\varphi_l^{n,M}\}(l=1,2,\dots,N2^{N-1})$ 。地址序列  $W_i^{n,M}$  包括起点和终点地址。 $N$  阶和  $N+1$  阶之间的演进层级关系可以使用  $W_i^{n,M}$  来描述,即

$$\begin{aligned} \varphi_l^{n+1,M} &= (\varphi_l^{1,M}(1)W_{l'+1}^{n,M}, \varphi_l^{1,M}(2)W_{l'+2}^{n,M}, \dots, \\ &\quad \varphi_l^{1,M}(2^M-2)W_{l'+2M-2}^{n,M}, \\ &\quad \varphi_l^{1,M}(2^M-1)W_{l'+2M-1}^{n,M}, \\ &\quad \varphi_l^{1,M}(2^M)W_{l'+2M}^{n,M}) \end{aligned} \quad (8)$$

式中,  $l' = (l-1)2^M; l=1,2,\dots,N2^{N-1}$ 。如果  $W$  为空( $n=0$ ),则式(8)就等价于初始条件表。

$\{W_i^{n,M}\}$  具有如下的性质

$$W_{l'+2}^{n,M} = W_{l'+3}^{n,M}, W_{l'+4}^{n,M} = W_{l'+5}^{n,M}, \dots, W_{l'+2M-2}^{n,M} = W_{l'+2M-1}^{n,M} \quad (9)$$

根据上述性质,可将演进层级关系公式简化为

$$\begin{aligned} \varphi_l^{n+1,M} &= (\varphi_l^{1,M}(1)W_{l'+1}^{n,M}, \varphi_l^{1,M}(2)W_{l'+2}^{n,M}, \varphi_l^{1,M}(3)W_{l'+2}^{n,M}, \\ &\quad \varphi_l^{1,M}(4)W_{l'+3}^{n,M}, \varphi_l^{1,M}(5)W_{l'+3}^{n,M}, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_l^{1,M}(2^M-2)W_{l'+2M-1}^{n,M}, \\ &\varphi_l^{1,M}(2^M-1)W_{l'+2M-1}^{n,M}, \\ &\varphi_l^{1,M}(2^M)W_{l'+2M-1+1}^{n,M}) \end{aligned} \quad (10)$$

式中,  $l' = (l-1)(2^{M-1}+1), l=1,2,\dots,N2^{N-1}$ 。

假定记演进层级关系表为  $T_{\text{induct}}^M[l]$ , 则

$$\begin{aligned} T_{\text{induct}}^M[l] &= [\text{induct}(W_{l'+1}^{N,M}), \text{induct}(W_{l'+2}^{N,M}), \\ &\quad \text{induct}(W_{l'+2}^{N,M}), \text{induct}(W_{l'+3}^{N,M}), \\ &\quad \text{induct}(W_{l'+3}^{N,M}), \dots, \text{induct}(W_{l'+2M-1}^{N,M}), \\ &\quad \text{induct}(W_{l'+2M-1}^{N,M}), \text{induct}(W_{l'+2M-1+1}^{N,M})] \end{aligned} \quad (11)$$

式中,  $\text{induct}(W)$  表示输入地址序列  $W$ , 输出其对应第几条 Hilbert 曲线。

以 3 维欧拉空间  $\mathbf{R}^3$  为例, 则  $T_{\text{induct}}^3[1] = (3, 2, 2, 10, 10, 5, 5, 9), T_{\text{induct}}^3[3] = (1, 2, 2, 6, 6, 1, 1, 7)$ 。根据  $T_{\text{induct}}^3[l]$  可以计算得到其完整演进层级关系表达式, 即 3 维 Hilbert 曲线  $N$  阶和  $N+1$  阶之间关系为

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^{N+1,3} &= (000\varphi_3^{N,3}, 001\varphi_2^{N,3}, 011\varphi_2^{N,3}, 010\varphi_{10}^{N,3}, \\ &\quad 110\varphi_{10}^{N,3}, 111\varphi_5^{N,3}, 101\varphi_5^{N,3}, 100\varphi_9^{N,3}) \\ \varphi_2^{N+1,3} &= (000\varphi_3^{N,3}, 001\varphi_1^{N,3}, 101\varphi_1^{N,3}, 100\varphi_8^{N,3}, \\ &\quad 110\varphi_8^{N,3}, 111\varphi_4^{N,3}, 011\varphi_4^{N,3}, 010\varphi_{12}^{N,3}) \\ \varphi_3^{N+1,3} &= (000\varphi_1^{N,3}, 100\varphi_2^{N,3}, 110\varphi_2^{N,3}, 010\varphi_6^{N,3}, \\ &\quad 011\varphi_6^{N,3}, 111\varphi_{11}^{N,3}, 101\varphi_{11}^{N,3}, 001\varphi_7^{N,3}) \\ \varphi_4^{N+1,3} &= (110\varphi_5^{N,3}, 100\varphi_6^{N,3}, 101\varphi_6^{N,3}, 111\varphi_7^{N,3}, \\ &\quad 011\varphi_7^{N,3}, 001\varphi_{12}^{N,3}, 000\varphi_{12}^{N,3}, 010\varphi_2^{N,3}) \\ \varphi_5^{N+1,3} &= (110\varphi_6^{N,3}, 111\varphi_4^{N,3}, 011\varphi_4^{N,3}, 010\varphi_{11}^{N,3}, \\ &\quad 000\varphi_{11}^{N,3}, 001\varphi_1^{N,3}, 101\varphi_1^{N,3}, 100\varphi_9^{N,3}) \\ \varphi_6^{N+1,3} &= (110\varphi_4^{N,3}, 010\varphi_5^{N,3}, 000\varphi_5^{N,3}, 100\varphi_3^{N,3}, \\ &\quad 101\varphi_3^{N,3}, 001\varphi_8^{N,3}, 011\varphi_8^{N,3}, 111\varphi_{10}^{N,3}) \\ \varphi_7^{N+1,3} &= (101\varphi_8^{N,3}, 111\varphi_9^{N,3}, 110\varphi_9^{N,3}, 100\varphi_4^{N,3}, \\ &\quad 000\varphi_4^{N,3}, 010\varphi_3^{N,3}, 011\varphi_3^{N,3}, 001\varphi_{11}^{N,3}) \\ \varphi_8^{N+1,3} &= (101\varphi_9^{N,3}, 100\varphi_7^{N,3}, 000\varphi_7^{N,3}, 001\varphi_2^{N,3}, \\ &\quad 011\varphi_2^{N,3}, 010\varphi_{10}^{N,3}, 110\varphi_{10}^{N,3}, 111\varphi_6^{N,3}) \\ \varphi_9^{N+1,3} &= (101\varphi_7^{N,3}, 001\varphi_8^{N,3}, 011\varphi_8^{N,3}, 111\varphi_{12}^{N,3}, \\ &\quad 110\varphi_{12}^{N,3}, 010\varphi_5^{N,3}, 000\varphi_5^{N,3}, 100\varphi_1^{N,3}) \\ \varphi_{10}^{N+1,3} &= (011\varphi_{11}^{N,3}, 010\varphi_{12}^{N,3}, 000\varphi_{12}^{N,3}, 001\varphi_1^{N,3}, \\ &\quad 101\varphi_1^{N,3}, 100\varphi_6^{N,3}, 110\varphi_6^{N,3}, 111\varphi_8^{N,3}) \\ \varphi_{11}^{N+1,3} &= (011\varphi_{12}^{N,3}, 010\varphi_{10}^{N,3}, 110\varphi_{10}^{N,3}, 111\varphi_5^{N,3}, \\ &\quad 101\varphi_5^{N,3}, 100\varphi_7^{N,3}, 000\varphi_7^{N,3}, 001\varphi_3^{N,3}) \\ \varphi_{12}^{N+1,3} &= (011\varphi_{10}^{N,3}, 111\varphi_{11}^{N,3}, 101\varphi_{11}^{N,3}, 001\varphi_9^{N,3}, \\ &\quad 000\varphi_9^{N,3}, 100\varphi_2^{N,3}, 110\varphi_2^{N,3}, 010\varphi_4^{N,3}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

从式(12)可得到演进层次表  $T_{\text{induct}}^3$  为

$$T^3_{\text{induct}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 10 & 10 & 5 & 5 & 9 \\ 3 & 1 & 1 & 8 & 8 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 6 & 6 & 11 & 11 & 7 \\ 5 & 6 & 6 & 7 & 7 & 12 & 12 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 11 & 11 & 1 & 1 & 9 \\ 4 & 5 & 5 & 3 & 3 & 8 & 8 & 10 \\ 8 & 9 & 9 & 4 & 4 & 3 & 3 & 11 \\ 9 & 7 & 7 & 2 & 2 & 10 & 10 & 6 \\ 7 & 8 & 8 & 12 & 12 & 5 & 5 & 1 \\ 11 & 12 & 12 & 1 & 1 & 6 & 6 & 8 \\ 12 & 10 & 10 & 5 & 5 & 7 & 7 & 3 \\ 10 & 11 & 11 & 9 & 9 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

由此,可以根据初始条件表和演进层次表计算 3 维欧拉空间  $\mathbf{R}^3$  任意一条可能的 Hilbert 曲线经过的坐标地址顺序列表。当然,其也可以拓展到更高的维度空间。

为了与表 2 对应,3 维 1 阶 Hilbert 曲线的走向选定为第 2 条 Hilbert 曲线,即  $\varphi_2^{1,3}$  为 3 维 1 阶 Hilbert 曲线对应的地址顺序列表,其中  $J$  对应  $X_1$ , $I$  对应  $X_2$ , $K$  对应  $X_3$ 。3 维  $N$  阶 Hilbert 曲线是在第 2 条 Hilbert 曲线基础上依次按照  $T^3_{\text{induct}}$  得到的,其相应的地址顺序列表(即 Hilbert 编码)也可以计算得到。

### 3 基于 Hilbert 曲线层级演进关系的网络编码计算

全球立体网格可抽象为一个初始超立方体,记为  $S_0^{0,3}$ ;按照八叉树剖分  $N$  次得到的立体网格单元可以抽象为子超立方体,记为  $S_a^{N,3}$ ;  $\varphi^{N,3}(h)$  表示 Hilbert 编码为  $h$  的立体网格单元。若 Hilbert 编码以二进制形式表达,则记为  $h^2$ ;若以八进制形式表达,则记为  $h^8$ 。

八叉树立体网格 Hilbert 编码是一种可用  $\{0,1,2,\cdots,7\}$  8 个码元描述的立体网格单元“定位”系统。Hilbert 编码  $h^2$  的每 3 位对应于立体网格单元  $S_a^{n,3}$  的一次“八分”,从最高的 3 位到最低 3 位依次对应  $S_a^{0,3}$  的第 1 级细分、第 2 级细分……直至第  $N$  级细分。

由于地球立体空间是一个连续的空间,因此可不断增加剖分等级  $N$ ,减小立体网格单元的粒度,提高网格定位的精度。随着剖分等级  $N$  不断增加,八叉树立体网格 Hilbert 编码集合  $\mathbf{H}$  将变成一个满足 Hilbert 曲线生成法则的无限空间集

合。结合一般数学加法运算的性质,根据分析,Hilbert 编码加法满足下面的性质:

- (1) 封闭性:若  $h_A^2, h_B^2 \in \mathbf{H}$ ,  $h_{\text{new}}^2 = h_A^2 + h_B^2$ , 则  $h_{\text{new}}^2 \in \mathbf{H}$ 。
- (2) 结合律:若  $h_A^2, h_B^2, h_C^2 \in \mathbf{H}$ , 则满足  $(h_A^2 + h_B^2) + h_C^2 = h_A^2 + (h_B^2 + h_C^2)$ 。
- (3) 交换律:若  $h_A^2, h_B^2 \in \mathbf{H}$ , 则满足  $h_A^2 + h_B^2 = h_B^2 + h_A^2$ 。
- (4) 消去律:若  $h_A^2, h_B^2, h_C^2 \in \mathbf{H}$  且  $h_A^2 + h_C^2 = h_B^2 + h_C^2$ , 则  $h_A^2 = h_B^2$ 。

假定  $A$  和  $B$  是两个同一剖分等级的立体网格单元,分别为  $S_a^{N,3}$  和  $S_b^{N,3}$ 。根据 Hilbert 编码生成算法和层级关系,可以得出 Hilbert 编码满足下列运算。

#### 3.1 集合运算

- (1) 若  $a \neq a'$ , 则  $S_a^{N,3} \neq S_{a'}^{N,3}$  或  $S_a^{N,3} \cap S_{a'}^{N,3} = \emptyset$ , 即两个不同立体网格单元的 Hilbert 编码不同,地址也不同。

- (2)  $\bigcup_{i=1}^8 S_{abi}^{N+1,M} = S_a^{N,M}$ ,  $S_{abi}^{N+1,M}$  是  $S_a^{N,3}$  经过一次剖分得到 8 个子单元。

#### 3.2 位运算

- (1) 异或运算。  $h_A^2 \oplus h_B^2$ , 表示  $A$  和  $B$  两个立体网格单元的 Hilbert 编码逐位进行异或运算。异或运算可以应用于判断 Hilbert 编码在哪一个剖分等级开始与其直接父单元不再是同一个单元。

- (2) 右移运算。  $h_{N+1}^2 \gg 3 = h_N^2$ , 即  $N+1$  级立体网格单元  $S_{abi}^{N+1,3}$  ( $0 \leq i \leq 7$ ) 的 Hilbert 编码右移 3 位得到其对应的  $N$  级单元  $S_a^{N,3}$  的 Hilbert 编码。

- (3) 左移运算。  $h_N^2 \ll 3 = h_{N+1}^2$ , 即  $N$  级立体网格单元  $S_a^{N,3}$  的 Hilbert 编码左移 3 位得到  $N+1$  级单元  $S_{ab0}^{N+1,3}$  (第 1 个子单元)的 Hilbert 编码。

#### 3.3 数学加法运算

$h_{\text{new}}^2 = h_A^2 + h_B^2$  或  $h_{\text{new}}^8 = h_A^8 + h_B^8$ , 表示两个 Hilbert 码进行数学加法运算,其运算规则按照二进制或八进制加法进行。Hilbert 编码( $h^8$ )的每 1 位表示立体网格单元在相应剖分层次上的 8 个子立方体中的哪一个。

具体运算过程(以八进制为例):从低位开始逐位进行加法运算,若相应结果大于等于 8,则向高位进位,其含义是在高一等级的剖分网格中沿 Hilbert 曲线走向前进了相应的子立方体数量;若

最终结果增加了一位,则表明剖分等级增加一级。若想得到 Hilbert 编码对应的地址码  $\varphi^{N \cdot 3}(h)$ ,只需依次从高位到低位获取数值,依据 Hilbert 编码层级关系计算得到。

例如: $44+72=136$ ,计算结果增加一位表明剖分等级增加一级,个位数“6”表示在最低剖分等级的 8 个子立方体的第 7 个中(注意:编码是从 0,1,...,7),同理依次可以得出 10 位数“3”对应于第 4 个子立方体,百位数“1”对应于第 1 个子立方体。按照层次关系,可得知不同剖分层次上对应的 Hilbert 曲线依次为  $\varphi_2^{3 \cdot 3}$ 、 $\varphi_1^{2 \cdot 3}$ 、 $\varphi_2^{1 \cdot 3}$ ,则可得出 136(Hilbert 码)对应的地址码  $\varphi^{3 \cdot 3}(136)=123$ ,二进制形式为 001010011。

3.4 数学减法运算

$h_{new}^2 = |h_A^2 - h_B^2|$  或  $h_{new}^8 = |h_A^8 - h_B^8|$ ,表示两个 Hilbert 编码进行数学减法运算,其运算规则按照二进制或八进制减法进行。

具体运算过程(八进制为例):先比较两个 Hilbert 编码的大小,以较大的 Hilbert 编码减去较小的,从低位开始逐位进行减法运算,若不能进行减法运算,则向高位借位,其含义是在高一等级的剖分网格中沿 Hilbert 曲线走向后退一个子立方体;若最终结果减少了一位,则表明剖分等级减少一级。若想得到 Hilbert 编码对应的地址码  $\varphi^{N \cdot 3}(h)$ ,只需依次从高位到低位获取数值,依据 Hilbert 编码层级关系计算得到。

4 结束语

建立以网格编码为基础的代数运算法则是推动全球空间网格从数据组织管理框架发展成为新一代空间分析模型的理论基础。本文基于 Hilbert 曲线设计了八叉树立体网格单元编码,分析推导出 Hilbert 曲线层级演进关系表,以此基础给出了用于网格编码代数运算的若干操作算子。Hilbert 曲线层级演进关系的分析方法可以扩展到其他结构的全球空间网格模型中,从而为构建全球空间网格分析理论与方法提供参考。

参考文献:

[1] 万刚,曹雪峰,李科,等.地理空间信息网格理论与技术[M].北京:测绘出版社,2016.  
WAN Gang, CAO Xuefeng, LI Ke, et al. Geospatial Information Grid Theory and Technology[M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2016.  
[2] SAHR K, WHITE D, KIMERLING A J. Geodesic Discrete

Global Grid Systems[J]. Cartography and Geographic Information Science, 2003, 30(2): 121-134.  
[3] LUKATELA H. A Seamless Global Terrain Model in the Hipparchus System[EB/OL]. (2012-05-30). <http://www.geodyssey.com/papers/ggterra.html>.  
[4] 韩阳,万刚,曹雪峰.混合式全球网格划分方法及编码研究[J].测绘科学,2009,34(2): 136-138, 166.  
HAN Yang, WAN Gang, CAO Xuefeng. Research on A Mix Global Grid Data Structure and Encoding[J]. Science of Surveying and Mapping, 2009, 34(2): 136-138, 166.  
[5] KAGEYAMA A, SATO T. The “Yin-Yang Grid”: An Overset Grid in Spherical Geometry[J]. Geochemistry Geophysics Geosystems, 2004, 5(9): Q09005.  
[6] TSUBOI S, KOMATITSCH D, JI C, et al. Computations of global seismic wave propagation in three dimensional Earth mode[M]//LABARTA J, JOE K, SATO T. High-Performance Computing. Berlin Heidelberg: Springer, 2008: 434-443.  
[7] 吴立新,余接情.基于球体退化八叉树的全球三维网格与变形特征[J].地理与地理信息科学,2009,25(1): 1-4.  
WU Lixin, YU Jieqing. Global 3D-Grid Based on Sphere Degenerated Octree and Its Distortion Features[J]. Geography and Geo-Information Science, 2009, 25(1): 1-4.  
[8] 曹雪峰.地球圈层空间网格理论与算法研究[D].郑州:解放军信息工程大学,2012.  
CAO Xuefeng. Research on Earth Sphere Shell Space Grid Theory and Algorithms[D]. Zhengzhou: The PLA Information Engineering University, 2012.  
[9] 程承旗,张恩东,万元鬼,等.遥感影像剖分金字塔研究[J].地理与地理信息科学,2010,26(1): 19-23.  
CHENG Chengqi, ZHANG Endong, WAN Yuanwei, et al. Research on Remote Sensing Image Subdivision Pyramid[J]. Geography and Geo-Information Science, 2010, 26(1): 19-23.  
[10] 余接情,吴立新.适应性球体退化八叉树格网及其编码[J].地理与地理信息科学,2012,28(1): 14-18.  
YU Jieqing, WU Lixin. Adaptable Spheroid Degenerated-Octree Grid and Its Coding Method[J]. Geography and Geo-Information Science, 2012, 28(1): 14-18.  
[11] 张宗佩.地月圈层立体网格理论与应用研究[D].郑州:信息工程大学,2015.  
ZHANG Zongpei. Research on Earth-Lunar Sphere Shell Space Grid Theory and Application[D]. Zhengzhou: Information Engineering University, 2015.  
[12] FALOUTSOS C, ROSEMAN S. Fractals for Secondary Key Retrieval[C]//Proceeding of the 8th ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART Symposium on Principles of Database Systems. Philadelphia: ACM, 1989: 247-252.  
[13] 陆锋,周成虎.一种基于空间层次分解的 Hilbert 码生成算法[J].中国图象图形学报,2001,6A(5): 465-469.  
LU Feng, ZHOU Chenghu. An Algorithm for Hilbert Ordering Code Based on Spatial Hierarchical Decomposition

[J]. Journal of Image and Graphics, 2001, 6A(5): 465-469.

[14] 李绍俊, 钟耳顺, 王少华, 等. 基于状态转移矩阵的 Hilbert 码快速生成算法[J]. 地球信息科学, 2014, 16(6): 846-851.

LI Shaojun, ZHONG Ershun, WANG Shaohua, et al. An Algorithm for Hilbert Ordering Code Based on State-Transition Matrix [J]. Journal of Geo-Information Science, 2014, 16(6): 846-851.

[15] 李晨阳, 段雄文, 冯玉才. *N* 维 Hilbert 曲线生成算法[J]. 中国图象图形学报, 2006, 11(8): 1068-1075.

LI Chenyang, DUAN Xiongwen, FENG Yucai. Algorithm for Generating *N*-Dimensional Hilbert Curve[J]. Journal of Image and Graphics, 2006, 11(8): 1068-1075.

[16] 刘辉, 冷伟, 崔涛. 高维 Hilbert 曲线的编码与解码算法设计[J]. 数值计算与计算机应用, 2015, 36(1): 42-58.

LIU Hui, LENG Wei, CUI Tao. Development of Encoding and Decoding Algorithms for High dimensional Hilbert Curves[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications, 2015, 36(1): 42-58.

[17] 童晓冲, 贲进. 空间信息剖分组织的全球离散格网理论与方法[M]. 北京: 测绘出版社, 2016.

TONG Xiaochong, BEN Jin. The Principles and Methods of Discrete Global Grid Systems for Geospatial Information Subdivision Organization [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 2016.

[18] SAGAN H. Space-Filling Curve[M]. New York: Springer Verlag, 1994.

(责任编辑: 张艳玲)

---

**收稿日期:** 2016-08-20  
**修回日期:** 2016-10-20  
**第一作者简介:** 曹雪峰(1983—),男,讲师,研究方向为全球离散格网。  
**First author:** CAO Xuefeng(1983—),male,lecturer,majors in discrete global grid.  
**E-mail:** CAO\_Xue\_Feng@163.com