引文格式:王志忠,陈丹华,宋迎春.具有不确定性平差算法[J].测绘学报,2017,46(7):834-840. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20160522.
WANG Zhizhong,CHEN Danhua,SONG Yingchun.An Algorithm in Adjustment Model with Uncertainty[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2017,46(7):834-840. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20160522.

具有不确定性平差算法

王志忠[1,2],陈丹华[2],宋迎春[1]

1.中南大学地球信息科学与物理学院,湖南 长沙 410083;2.中南大学数学与统计学院,湖南 长沙 410083

An Algorithm in Adjustment Model with Uncertainty

WANG Zhizhong[1,2],CHEN Danhua[2],SONG Yingchun[1]

1. School of Geosciences and Info-physic, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Mathamatic and Statistics, Central South University, Changsha 410083, China

Abstract: The uncertainty of observation often affects the validity of parameter estimation, and the effects of uncertainty can be reduced effectively by incorporating uncertainty into the adjustment model as an observation error parameter. An adjustment criterion is proposed under the bound constrain of uncertainty, in which the sum of squares of random error and uncertainty error should be minimized, and provided an iteration algorithm to solve the adjustment model. With simulation examples, the estimation results of uncertainty least-square method are compared with that of total least-square method. The results show that the estimation results of uncertainty least-square method are better than that of total least-square method to a certain extent and more applicable when uncertainty is greater.

Key words: adjustment model; adjustment criterion; uncertainty; total least-squares estimation; prior information

Foundation support: The National Natural Science Foundation of China (No. 41574006)

摘　要:观测不确定性常常影响参数估计的有效性。将不确定度作为参数融入平差模型,可以有效地降低不确定性的影响。本文提出有界不确定性误差约束下,随机误差与不确定性误差平方和最小的平差准则,并给出了一个不确定性平差模型迭代算法。通过仿真实例,对不确定性最小二乘法与总体最小二乘法进行了比较。结果显示:在一定程度上,不确定性最小二乘方法的估计结果要略优于总体最小二乘方法,且在不确定性较大时,该方法有较好的适用性。

关键词:平差模型;平差准则;不确定性;总体最小二乘估计;先验信息

中图分类号:P207　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1001-1595(2017)07-0834-07

基金项目:国家自然科学基金(41574006)

测绘数据获取过程中,常存在复杂的不确定性[1],它通常以不确定信息形式表现出来。它比一般的噪声更复杂,其分布、均值和方差等统计特性不清楚[2],描述非常困难。不确定度是对不确定性的一种度量,它可以用方差、均方差、误差区间、误差椭圆、误差椭球来表示[3,4]。在测绘数据处理领域,应用不确定度理论,研究不确定度评定方法,寻找减小不确定度的算法等已成为研究热点[5-10]。文献[11—13]对测量不确定度理论进行了研究,拓展了测量平差数据处理的理论与方法。整体平差算法也可以看成是对于不确定性平差算法的一种探索,它在一定程度上减弱了不确定性因素的影响[14-18]。由于不确定性的统计信息(如均值和方差等)和概率分布函数无法确定,人为地确定它们的统计性质本身就在增加新的不确定性,从而影响参数估计的可靠性[19-20]。

利用先验信息来抑制不确定性是不确定性观测数据平差的有效方法,但是,测绘工程中基于先验信息的平差算法比较复杂[21]。文献[22]直接将不确定度作为一个参数融入函数模型中,建立

min-max 平差准则，即让残差中的最大不确定性达到最小，从而使得参数解中的不确定性达到最小化，在算法中对不确定度进行抑制，引入岭参数对模型进行求解，得到了较好的效果。本文在该方法的基础上，基于随机误差和不确定性误差平方和最小的新平差准则，提出了一种新的迭代求解算法，简化了文献[22]中的算法，同时也避免了迭代不收敛的情况。

1　不确定性平差模型及平差准则

考虑更广一类平差模型，即不确定性平差模型

$$\boldsymbol{L}+\Delta\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{e} \tag{1a}$$

$$\left.\begin{aligned}\|\Delta\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\alpha\\ \|\Delta\boldsymbol{L}\|_2\leqslant\beta\end{aligned}\right\} \tag{1b}$$

式中，$\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 维设计矩阵；$\boldsymbol{X}$ 为 m 维未知参数向量；$\boldsymbol{L}$ 为 n 维观测向量；$\boldsymbol{e}$ 为 n 维随机误差向量，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{e})=0$；$\Delta\boldsymbol{A}$ 和 $\Delta\boldsymbol{L}$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的不确定性误差；α 和 β 是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的不确定度；$\|\Delta\boldsymbol{L}\|_2=\Delta\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{L}$；$\|\Delta\boldsymbol{A}\|_2=\boldsymbol{e}_A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_A$，这里 $\boldsymbol{e}_A=\mathrm{vec}(\Delta\boldsymbol{A})$，表示 $\Delta\boldsymbol{A}$ 的拉直变换。

文献[23—24]研究的污染误差模型仅考虑模型误差和随机误差，且模型误差没有有界假设（式(1b)中 $\alpha=0,\beta=+\infty$），模型误差包括未顾及的系统误差和未发现的粗差，文献[24]中将其表示为均值移动误差，与随机误差不同；文献[25]研究的总体平差模型中只考虑随机误差和系数矩阵误差，且系数矩阵误差没有有界约束（式(1b)中 $\alpha=+\infty,\beta=0$）；文献[22]认为经典平差模型 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{AX}+\boldsymbol{e}$ 中，“真”系数矩阵应为 $\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}$，“真”观测值应为 $\boldsymbol{L}+\Delta\boldsymbol{L}$，不确定性误差 $\Delta\boldsymbol{A}$、$\Delta\boldsymbol{L}$ 带有先验信息，可由不等式约束 $\|\Delta\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\alpha$、$\|\Delta\boldsymbol{L}\|_2\leqslant\beta$、描述，文献[22]没考虑随机误差。因此，本文提出的不确定性平差模型(1)可认为是更广泛的一类平差模型，下面还将说明本文结果在特定情况下可得出文献[25]的主要结果。

不确定性误差的有界性可看成是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 已知的先验信息。不确定性往往不具有统计性质，可以用区间来评定。文献[22]中，分别用以 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{L}$ 为圆心，α、β 为半径的圆来描述 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{L}$ 的不确定性，本文沿用此种方法；在文献[22]中，采用 min-max 准则对有界不确定性平差模型进行解算，该准则的缺点是不能用观测信息和先验有界信息估计不确定误差 $\Delta\boldsymbol{A}$ 和 $\Delta\boldsymbol{L}$，同时，未知参数 $\boldsymbol{X}$ 的估计结果中不含不确定度 β，即不确定误差 $\Delta\boldsymbol{L}$ 对平差解算结果没有影响。为了解决这个问题，本文建立了在有界不确定性误差约束下随机误差和不确定性误差平方和最小准则，简称为不确定性最小二乘准则，即

$$\min: f(\boldsymbol{e},\Delta\boldsymbol{L},\boldsymbol{e}_A)=\|\boldsymbol{e}\|_2^2+\|\Delta\boldsymbol{L}\|_2^2+\|\boldsymbol{e}_A\|_2^2 \tag{2a}$$

s.t.

$$\boldsymbol{L}+\Delta\boldsymbol{L}=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{e} \tag{2b}$$

$$\|\Delta\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\alpha,\quad \|\Delta\boldsymbol{L}\|_2\leqslant\beta \tag{2c}$$

参照文献[13]中对带线性不等式约束平差模型的简单算法及文献[25—26]中解算总体最小二乘问题的 Euler-Lagrange 逼近法，本文引入 Lagrange 乘子，结合库恩-塔克条件，对上述二次规划问题进行求解。

应用广义 Lagrange 法构造如式(3)所示的目标函数

$$\begin{aligned}F(\hat{\boldsymbol{e}},\Delta\hat{\boldsymbol{L}},\hat{\boldsymbol{e}}_A,\lambda,\mu,u)=&\|\hat{\boldsymbol{e}}\|_2^2+\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2^2+\|\hat{\boldsymbol{e}}_A\|_2^2+\\&2\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{L}+\Delta\hat{\boldsymbol{L}}-\hat{\boldsymbol{e}}-(\boldsymbol{A}+\Delta\hat{\boldsymbol{A}})\hat{\boldsymbol{X}}]+\\&\mu(\|\hat{\boldsymbol{e}}_A\|_2^2-\alpha^2)+u(\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2^2-\beta^2)\end{aligned} \tag{3}$$

式中，λ、$\mu\geqslant0$、$u\geqslant0$ 都是 Lagrange 乘子。不确定性最小二乘估计由库恩-塔克条件确定，即

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\hat{\boldsymbol{e}}}=\hat{\boldsymbol{e}}-\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0} \tag{4a}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\Delta\hat{\boldsymbol{L}}}=(1+u)\Delta\hat{\boldsymbol{L}}+\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0} \tag{4b}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}-\Delta\hat{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0} \tag{4c}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial\hat{\boldsymbol{e}}_A}=&(1+\mu)\hat{\boldsymbol{e}}_A-(\hat{\boldsymbol{X}}\otimes\boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{\lambda}=\\&\mathrm{vec}[(1+\mu)\Delta\hat{\boldsymbol{A}}-\boldsymbol{\lambda}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}]=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{4d}$$

$$\mu(\|\hat{\boldsymbol{e}}_A\|_2^2-\alpha^2)=0 \tag{4e}$$

$$u(\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2^2-\beta^2)=0 \tag{4f}$$

$$\boldsymbol{L}+\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=(\boldsymbol{A}+\Delta\hat{\boldsymbol{A}})\hat{\boldsymbol{X}}+\hat{\boldsymbol{e}} \tag{4g}$$

式中，$\otimes$ 表示 Kronecker 积；$\mu\geqslant0$；$u\geqslant0$。将式(4a)、式(4b)和式(4d)代入式(4g)，整理得到

$$\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=\Delta\hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{X}}+\hat{\boldsymbol{e}}-\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{\lambda}(1+u^*+\mu^*\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{5}$$

式中，$\mu^*=\dfrac{1}{1+\mu}$；$u^*=\dfrac{1}{1+u}$。

由式(4a)、式(5)可得

$$\hat{\boldsymbol{e}}=\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})(1+u^*+\mu^*\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{-1} \tag{6}$$

由式(5)可得到法方程式

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})=\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{7}$$

将式(4c)和式(6)代入式(7)整理得

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}\frac{(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})}{(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})}=\hat{\boldsymbol{X}}\hat{V} \tag{8}$$

式中

$$\hat{V}=\mu^{*}\frac{(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})}{1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}} \tag{9}$$

由式(8)变形得到

$$\hat{\boldsymbol{X}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\hat{\boldsymbol{X}}\hat{V}) \tag{10}$$

将式(6)代入式(4d)得

$$\Delta\hat{\boldsymbol{A}}=\mu^{*}\boldsymbol{\lambda}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}=\mu^{*}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

将式(6)代入式(4b)得到

$$\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=-u^{*}\boldsymbol{\lambda}=-u^{*}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{-1} \tag{12}$$

由式(11)和式(12)可知,不确定性 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}$ 在解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 给定条件下由 Lagrange 乘子和确定,可以分以下 4 种情况讨论。

(1) $\mu>0, u>0$。由式(4e)和(4f)得

$$\|\Delta\hat{\boldsymbol{A}}\|_2=\alpha \tag{13a}$$

$$\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2=\beta \tag{13b}$$

由式(13)解方程组得

$$u=\frac{\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|_2}{\beta}-\frac{\alpha\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|_2\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}}{\beta\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\|_2}-2 \tag{14a}$$

$$\mu=\frac{\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\|_2}{\alpha}-\frac{\beta\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\|_2}{\alpha\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|_2}-\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}-1 \tag{14b}$$

将 μ 和 u 代入式(11)和式(12)可得到不确定性 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}$。

(2) $u>0, \mu=0$($\mu<0$ 视为 $\mu=0$)。有 $\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2=\beta$,由式(12)解方程得

$$u=\frac{\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|_2-\beta}{\beta(1+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})}-1 \tag{15}$$

不确定性 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\Delta\hat{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\left(1+\frac{1}{1+u}+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \tag{16a}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=\frac{1}{1+u}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\left(1+\frac{1}{1+u}+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1} \tag{16b}$$

式中,u 由式(15)确定。

(3) $\mu>0, u=0$($u<0$ 视为 $u=0$)。由式(7)解方程得

$$\mu=\frac{\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\|-\alpha\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}}{2\alpha}-1 \tag{17}$$

不确定性 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\Delta\hat{\boldsymbol{A}}=\frac{1}{1+\mu}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\left(2+\frac{1}{1+\mu}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \tag{18a}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\left(2+\frac{1}{1+\mu}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}\right)^{-1} \tag{18b}$$

式中,μ 由式(17)确定。

(4) $\mu=0$($\mu<0$ 视为 $\mu=0$),$u=0$($u<0$ 视为 $u=0$),不确定性 $\Delta\boldsymbol{L}$ 和 $\Delta\boldsymbol{A}$ 可表示为

$$\Delta\hat{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})(2+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{-1}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}} \tag{19a}$$

$$\Delta\hat{\boldsymbol{L}}=(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})(2+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{-1} \tag{19b}$$

利用式(10)求解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 非常复杂,只能用迭代法求解。下面分析式(10)迭代求解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 收敛性问题。令

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\hat{\boldsymbol{X}}\hat{V}(\hat{\boldsymbol{X}})) \tag{20}$$

$\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})$ 对 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 求偏导,并结合式(9)可得到

$$\frac{\partial\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\left[\hat{V}(\hat{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{I}+\frac{\partial\hat{V}(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\right] \tag{21}$$

式中

$$\frac{\partial\hat{V}(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}=-2\mu^{*}\frac{\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})}{1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}}-2\mu^{*2}\frac{(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})}{(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})^{2}}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{22}$$

由式(4a)和式(5)可得到

$$\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}=(1+u^{*}+\mu^{*}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}})\hat{\boldsymbol{e}} \tag{23}$$

将式(23)代入式(22)和式(9)得到

$$\frac{\partial\hat{V}(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}=-2\mu^{*}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}-2\mu^{*2}\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{X}} \tag{24}$$

$$\hat{V}=\mu^{*}\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}) \tag{25}$$

将式(24)和式(25)代入式(21)得到

$$\frac{\partial\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}[\mu^{*}\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{I}-2\mu^{*}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}-2\mu^{*2}\hat{\boldsymbol{e}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{X}}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}] \tag{26}$$

注意到 $\|\mu^{*}\|\leqslant 1$ 和范数性质,由式(26)可得到

$$\left\|\frac{\partial\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}\right\|\leqslant\|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\|(\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|+2\|\boldsymbol{A}\|\cdot\|\hat{\boldsymbol{X}}\|+2\|\hat{\boldsymbol{e}}\|\cdot\|\hat{\boldsymbol{X}}\|^{2}) \tag{27}$$

文中目标函数(21)是凸规划问题，最小二乘估计解 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 一定存在，故 $\|\hat{\boldsymbol{X}}\|$、$\|\boldsymbol{A}\|$、$\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}\|$ 和 $\|(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\|$ 都有界。从以上证明过程看出式(27)成立与 $\mu\geqslant 0$ 和 $u\geqslant 0$ 的取值无关，只要 $\|\hat{\boldsymbol{e}}\|$ 很小就有

$$\left\|\frac{\partial\varphi(\hat{\boldsymbol{X}})}{\partial\hat{\boldsymbol{X}}}\right\|<1 \tag{28}$$

此时，迭代算法是收敛的。

在上述不确定性平差模型中，若假设 $\beta=0$，$\alpha\rightarrow+\infty$，即为总体最小二乘模型，由(4e)有 $\mu=0$，$\mu^{*}=1$，再由式(15)有，$u=+\infty$，$u^{*}=0$。式(8)简化为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\hat{\boldsymbol{X}}\ \frac{(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}})}{1+\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}} \tag{29}$$

与文献[25]中式(3.3.27)一致。

2　不确定性平差模型解算方法

不确定性平差问题求解采用不确定性最小二乘逼近法。

输入：系数矩阵 $\boldsymbol{A}$，观测值 $\boldsymbol{L}$，不确定度 α 和 β，精度要求为 ε。

输出：不确定性最小二乘解 $\hat{\boldsymbol{X}}$，不确定误差解 $\Delta\hat{\boldsymbol{A}}$ 和 $\Delta\hat{\boldsymbol{L}}$ 以及二范数 $\|\Delta\hat{\boldsymbol{A}}\|_2$ 和 $\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2$，随机误差解 $\hat{\boldsymbol{e}}$ 和 $\|\hat{\boldsymbol{e}}\|_2$，总的误差平方和 $\|\hat{\boldsymbol{e}}\|_2^2+\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2^2+\|\Delta\hat{\boldsymbol{A}}\|_2^2$。

step 1：选定初始值 $V^{(0)}=0$，$\mu^{(0)}=0$，$u^{(0)}=0$，置 $k=0$。

step 2：计算 $\hat{\boldsymbol{X}}^{(0)}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}$。

step 3：计算

$$u=\frac{\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\|_2}{\beta}-\frac{\alpha\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\|_2\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}}{\beta\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\|_2}-2$$

$$\mu=\frac{\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\|}{\alpha}-\frac{\beta\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\|}{\alpha\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\|}-\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}-1$$

令 $\bar{\mu}=\max(0,\mu)$，$\bar{u}=\max(0,u)$。

step 4：如果 $\bar{\mu}>0$，$\bar{u}>0$，则置 $\mu^{(k+1)}=\bar{\mu}$，$u^{(k+1)}=\bar{u}$。

如果 $\bar{u}>0$，$\bar{\mu}=0$，则计算

$$\bar{u}^{*}=\frac{\|\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\|-\beta}{\beta(1+\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})}-1$$

置 $\mu^{(k+1)}=0$，$u^{(k+1)}=\max(\bar{u}^{*},0)$；

如果 $\bar{\mu}>0$，$\bar{u}=0$，则计算

$$\bar{\mu}^{*}=\frac{\|(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\|-\alpha\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}}{2\alpha}-1$$

置 $\mu^{(k+1)}=\max(\bar{\mu}^{*},0)$，$u^{(k+1)}=0$；

如果 $\mu=0$，$u=0$

置 $\mu^{(k+1)}=0$，$u^{(k+1)}=0$。

step 5：计算

$$\mu^{*(k+1)}=\frac{1}{1+\mu^{(k+1)}}$$

$$u^{*(k+1)}=\frac{1}{1+u^{(k+1)}}$$

$$\hat{V}^{(k+1)}=\mu^{*(k+1)}\frac{(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{L}-\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)})}{1+u^{*(k+1)}+\mu^{*(k+1)}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}}$$

step 6：计算

$$\hat{\boldsymbol{X}}^{(k+1)}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\hat{V}^{(k+1)})$$

step 7：当 $\|\hat{\boldsymbol{X}}^{(k+1)}-\hat{\boldsymbol{X}}^{(k)}\|<\varepsilon$ 时，计算结束，否则，置 $k=k+1$，转 step 3。

step 8：输出 $\hat{\boldsymbol{X}}=\hat{\boldsymbol{X}}^{(k+1)}$，$\mu=\mu^{(k+1)}$，$u=u^{(k+1)}$，由式(11)计算 $\Delta\hat{\boldsymbol{A}}$，式(12)计算 $\Delta\hat{\boldsymbol{L}}$，式(6)计算 $\hat{\boldsymbol{e}}$。

迭代过程可参考文献[25]，不同的是本文考虑了 Lagrange 乘子，并且在迭代过程中取 $\bar{\mu}=\max(0,\mu)$，$\bar{u}=\max(0,u)$，该方法保证了迭代的收敛速度；同时，文献[25]中还根据文献[27]的研究，提出了一种瑞利商加速算法，有兴趣的读者可以结合本文的迭代方法做进一步研究。在本文的实例中本算法已有较好的收敛性。

3　不确定性平差模型解算与分析

为了检验算法的有效性，本文以 2D 仿射变换的数学模型为例进行模拟分析。建立如下的 2D 仿射变换不确定性平差模型

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_t\\ \boldsymbol{b}_t\end{bmatrix}+\Delta L=\left(\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_s & \boldsymbol{b}_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{a}_s & \boldsymbol{b}_s\end{bmatrix}+\Delta A\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\boldsymbol{e}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{a}_t\\ \Delta\boldsymbol{b}_t\end{bmatrix}\\ &\Delta\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\Delta\boldsymbol{a}_s & \Delta\boldsymbol{b}_s & 0 & 0\\ 0 & 0 & \Delta\boldsymbol{a}_s & \Delta\boldsymbol{b}_s\end{bmatrix}\\ &\|\Delta\boldsymbol{A}\|_2\leqslant\alpha\\ &\|\Delta\boldsymbol{L}\|_2\leqslant\beta\end{aligned}\right\}$$

式中，$(\boldsymbol{a}_s,\boldsymbol{b}_s)$ 和 $(\boldsymbol{a}_t,\boldsymbol{b}_t)$ 分别为旧坐标系和新坐标系中的坐标观测值列向量；$\boldsymbol{X}=[x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4]^{\mathrm{T}}$ 为坐标变换参数；$\Delta\boldsymbol{a}_t$、$\Delta\boldsymbol{b}_t$、$\Delta\boldsymbol{a}_s$、$\Delta\boldsymbol{b}_s$ 是未知的不确定性误差。

假定变换参数的真实值为 $\boldsymbol{X}=[0.8\ \ -0.5\ \ 2\ \ 1]$，无误差的观测数据，即坐标真实值如表 1 所示。

表 1 无误差观测数据

Tab.1 Observations without errors

坐标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\tilde{\boldsymbol{a}}_s$	1	1	1	1.5	1.5	1.5	2	2	2	2.5	2.5	2.5
$\tilde{\boldsymbol{b}}_s$	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
$\tilde{\boldsymbol{a}}_t$	0.3	−0.2	−0.7	0.7	0.2	−0.3	1.1	0.6	0.1	1.5	1	0.5
$\tilde{\boldsymbol{b}}_t$	3	4	5	4	5	6	5	6	7	6	7	8

考虑到观测误差的存在，利用 Matlab 数学软件，随机生成服从 N(0,0.193 8)的相对误差序列，即保证相对误差以 99% 的概率落在[−50%，50%]的区间内，不确定度 $\alpha=4.77$、$\beta=9.90$，由此得到绝对误差 $\Delta\boldsymbol{a}_t$、$\Delta\boldsymbol{b}_t$、$\Delta\boldsymbol{a}_s$、$\Delta\boldsymbol{b}_s$，由真实值加上绝对误差计算得到带不确定性的观测数据，见表 2。虽然从模拟数据中生成了不确定性误差 $\Delta\boldsymbol{A}$、$\Delta\boldsymbol{L}$，但算法认为它们是未知的。本文采用总体最小二乘方法(total least-squares，TLS)和不确定性最小二乘方法(uncertainty least-squares，ULS)进行参数求解，并分析和比较两种方法的效果。

表 2 带不确定性观测数据

Tab.2 Observations with uncertainty

坐标	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\boldsymbol{a}_s$	0.72	0.94	0.84	1.20	1.15	1.39	2.42	1.75	2.27	2.37	1.71	3.01
$\boldsymbol{b}_s$	1.01	1.50	3.31	0.81	2.21	4.08	0.73	1.87	2.94	1.37	1.81	2.85
$\boldsymbol{a}_t$	0.20	−0.18	−0.61	0.96	0.19	−0.23	1.18	0.73	0.11	1.74	1.06	0.19
$\boldsymbol{b}_t$	1.73	4.73	5.20	5.04	4.19	7.23	3.60	4.98	5.08	6.36	5.95	8.16

总体最小二乘方法求得的结果为 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{TLS}}=[0.71\quad -0.39\quad 1.74\quad 1.29]$，估计值与真实值之间的误差用 2-范数表示为 $\|\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{TLS}}-\boldsymbol{X}\|_2=0.409\,1$；经过 4 次迭代，得到不确定性最小二乘估计的结果为 $\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ULS}}=[0.73\quad -0.35\quad 1.70\quad 1.15]$，估计值与真实值之间的误差为 $\|\hat{\boldsymbol{X}}_{\mathrm{ULS}}-\boldsymbol{X}\|_2=0.379\,9$，不确定性最小二乘估计的结果与真实值更为接近，两种方法得到新坐标系下的坐标估计见图 1。

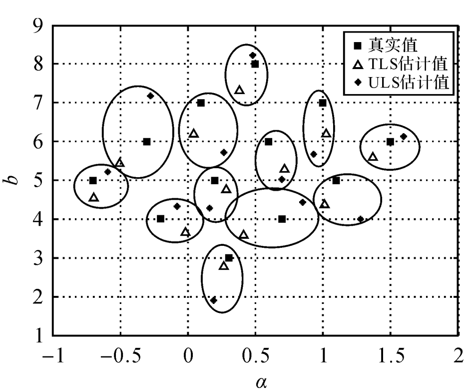

图 1 TLS 与 ULS 拟合结果

Fig.1 TLS and ULS fitting results

不确定性最小二乘准则，即有界不确定性误差约束下随机误差和不确定性误差平方和 $f(\hat{\boldsymbol{e}},\Delta\hat{\boldsymbol{L}},\hat{\boldsymbol{e}}_A)=\|\hat{\boldsymbol{e}}\|_2^2+\|\Delta\hat{\boldsymbol{L}}\|_2^2+\|\hat{\boldsymbol{e}}_A\|_2^2=5.385$。

为检验不确定性最小二乘方法的适用性，本文对上述实验独立重复进行 1000 次，得到该方法优于总体最小二乘方法的概率为 0.531。同时，经本文研究发现，不确定性的大小对实验结果有一定影响。在不同的相对误差下，重新计算 α、β 的大小，进行上述试验，得到不确定性最小二乘方法优于总体最小二乘方法的概率 p、不确定性最小二乘估计结果的误差 error 与 β 取值大小的关系见表 3 及图 2。从图 2 可以看出，不确定性越大，不确定性最小二乘方法优于总体最小二乘方法的概率越高。

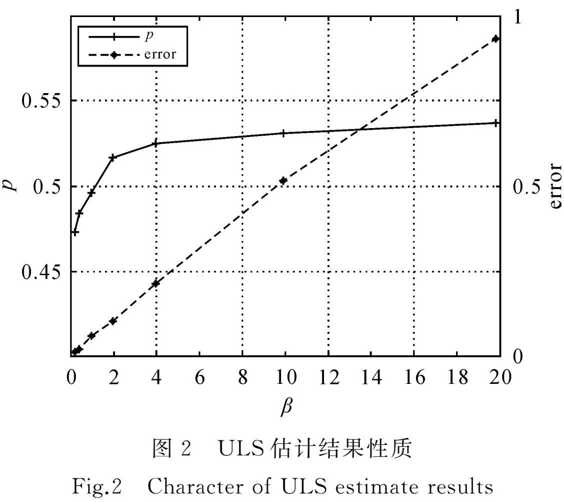

图 2 ULS 估计结果性质

Fig.2 Character of ULS estimate results

表 3　ULS 估计结果优良性与不确定性大小的关系

Tab. 3　The relationship between ULS estimate results and uncertainty

参数	β						
	0.198	0.396	0.99	1.98	3.96	9.90	19.8
p	0.473	0.484	0.496	0.517	0.525	0.531	0.537
error	0.011 0	0.021 5	0.057 9	0.103 4	0.213 9	0.514 8	0.932 1

4　结　论

在测量数据的获取过程中，经常存在不确定性，影响参数估计的可靠性。目前的测量平差方法是基于“观测值的不确定性就是随机性”这一基本假设的，实际测量工程中有许多不同于随机误差的不确定性因素。扩展误差理论与测量平差方法处理测量数据中的不确定度，必须对观测中不确定性因素进行数值化、参数化，把它们融入平差模型中，这需要有理论和方法上的突破。

本文将不确定性作为参数融入函数模型中，将不确定信息转化为先验约束信息，利用残差中不确定性传播规律，建立了一种有界不确定性误差约束下随机误差和不确定性误差平方和最小的平差准则，并用迭代算法得到了不确定性平差模型的解算方法，称为不确定性最小二乘方法。本文通过仿真实例求解，对总体最小二乘方法和不确定性最小二乘方法的估计结果进行了比较，认为在一定程度上，不确定性最小二乘方法的估计结果要优于总体最小二乘方法，并且在不确定性较小时，该方法有较好的估计精度。

参考文献：

[1]　杨元喜. 卫星导航的不确定性、不确定度与精度若干注记[J]. 测绘学报，2012，41(5)：646-650.
YANG Yuanxi. Some Notes on Uncertainty, Uncertainty Measure and Accuracy in Satellite Navigation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(5): 646-650.

[2]　BRAVO J M, ALAMO T, REDONDO M J, et al. An Algorithm for Bounded-error Identification of Nonlinear Systems Based on DC Functions[J]. Automatica, 2008, 44(2): 437-444.

[3]　Bureau International des Poids et Mesures. JCGM 104: 2009. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement[S]. Berne: Bureau International des Poids et Mesures, 1993.

[4]　邹永刚，翟京生，刘雁春，等. 利用不确定度的海底数字高程模型构建[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2011，36(8)：964-968.
ZOU Yonggang, ZHAI Jingsheng, LIU Yanchun, et al. Seabed DEM Construction Based on Uncertainty[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2011, 36(8): 964-968.

[5]　史玉峰，史文中，靳奉祥. GIS 中空间数据不确定性的混合熵模型研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2006，31(1)：82-85.
SHI Yufeng, SHI Wenzhong, JIN Fengxiang. Hybrid Entropy Model of Spatial Data Uncertainty in GIS[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2006, 31(1): 82-85.

[6]　张正禄，范国庆，张松林，等. 测量的广义可靠性研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2012，37(5)：577-581.
ZHANG Zhenglu, FAN Guoqing, ZHANG Songlin, et al. General Reliability of Measurement[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012, 37(5): 577-581.

[7]　贾帅东，张立华，宋国大，等. 基于区域平均垂直不确定度的自适应网格水深建模方法[J]. 测绘学报，2012，41(3)：454-460.
JIA Shuaidong, ZHANG Lihua, SONG Guoda, et al. A Method for Constructing an Adaptive Grid Digital Depth Model Based on Mean Vertical Uncertainty of Area[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(3): 454-460.

[8]　陈伟. 最小不确定度估计理论及其应用[D]. 武汉：武汉大学，2005.
CHEN Wei. Least Uncertainty Estimation Theory with Applications[D]. Wuhan: Wuhan University, 2005.

[9]　陈伟，王新洲. 最小不确定度估计原理及其病态问题解法研究[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2008，33(7)：752-754.
CHEN Wei, WANG Xinzhou. Least Uncertainty Estimation Theory and Its Applications to Resolving Morbid Problems[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2008, 33(7): 752-754.

[10]　王新洲. 最小不确定度约束下的极大可能性估计[J]. 测绘工程，2003，12(1)：5-8.
WANG Xinzhou. Maximum Possibility Estimation Restricted by Least Uncertainty[J]. Engineering of Surveying and Mapping, 2003, 12(1): 5-8.

[11]　陶本藻. 精确度和不确定度估计及应用[J]. 勘察科学技术，2003(5)：24-27.
TAO Benzao. Estimation of Accuracy and Uncertainty and Its Application[J]. Site Investigation Science and Technology, 2003(5): 24-27.

[12]　杨元喜. 关于“新的点位误差度量”的讨论[J]. 测绘学报，2009，38(3)：280-282.
YANG Yuanxi. Discussion on “A New Measure of Positional Error”[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2009, 38(3): 280-282.

[13]　宋迎春，左廷英，朱建军. 带有线性不等式约束平差模型的算法研究[J]. 测绘学报，2008，37(4)：433-437.

SONG Yingchun, ZUO Tingying, ZHU Jianjun. Research on Algorithm of Adjustment Model with Linear Inequality Constrained Parameters[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2008, 37(4): 433-437.

[14] SANSÒ F. A Window on the Future of Geodesy[M]. Berlin: Springer, 2005: 417-421.

[15] SCHAFFRIN B, WIESER A. On Weighted Total Least-squares Adjustment for Linear Regression[J]. Journal of Geodesy, 2008, 82(7): 415-421.

[16] 邱卫宁，齐公玉，田丰瑞. 整体最小二乘求解线性模型的改进算法[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2010，35(6)：708-710.
QIU Weining, QI Gongyu, TIAN Fengrui. An Improved Algorithm of Total Least Squares for Linear Models[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(6): 708-710.

[17] 孔建，姚宜斌，吴寒. 整体最小二乘的迭代解法[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2010，35(6)：711-714.
KONG Jian, YAO Yibin, WU Han. Iterative Method for Total Least-squares[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(6): 711-714.

[18] FANG Xing. Weighted Total Least Squares: Necessary and Sufficient Conditions, Fixed and Random Parameters[J]. Journal of Geodesy, 2013, 87(8): 733-749.

[19] EL GHAOUI L, LEBRET H. Robust Solutions to Least-squares Problems with Uncertain Data[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1997, 18(4): 1035-1064.

[20] CHANDRASEKARAN S, GOLUB G H, GU M, et al. Parameter Estimation in the Presence of Bounded Data Uncertainties[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 1998, 19(1): 235-252.

[21] 宋迎春，金昊，崔先强. 带有不确定性的观测数据平差解算方法[J]. 武汉大学学报(信息科学版)，2014，39(7)：788-792.
SONG Yingchun, JIN Hao, CUI Xianqiang. Adjustment Algorithm about Observation Data with Uncertain[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(7): 788-792.

[22] 宋迎春，谢雪梅，陈晓林. 不确定性平差模型的平差准则与解算方法[J]. 测绘学报，2015，44(2)：135-141. DOI: 10.11947/j.AGCS.2015.20130213.
SONG Yingchun, XIE Xuemei, CHEN Xiaolin. Adjustment Criterion and Algorithm in Adjustment Model with Uncertain[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2015, 44(2): 135-141. DOI: 10.11947/j.AGCS.2015.20130213.

[23] 王志忠，朱建军. 污染模型下的最优估计[J]. 测绘学报，1999，28(1)：51-56.
WANG Zhizhong, ZHU Jianjun. Optimal Estimation under Contaminated Error Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1999, 28(1): 51-56.

[24] 朱建军. 污染误差模型下的测量数据处理理论[D]. 长沙：中南工业大学，1998.
ZHU Jianjun. The Theory of Surveying Adjustment under Contaminated Error Model[D]. Changsha: Central South University of Technology, 1998.

[25] 鲁铁定. 总体最小二乘平差理论及其在测绘数据处理中的应用[D]. 武汉：武汉大学，2010.
LU Tieding. Research on the Total Least Squares and Its Applications in Surveying Data Processing[D]. Wuhan: Wuhan University, 2010.

[26] SCHAFFRIN B, FELUS Y A. On Total Least-squares Adjustment with Constraints[M]//SANSÒ F. A Window on the Future of Geodesy. Berlin: Springer, 2005: 417-421.

[27] SCHAFFRIN B, LEE I P, FELUS YA, et al. Total Least-squares (TLS) for Geodetic Straight-line and Plane Adjustment[J]. Bollettino di Geodesia e Scienze Affini, 2006, 65(3): 141-168.

（责任编辑：丛树平）

收稿日期：2016-10-12
修回日期：2017-02-27

第一作者简介：王志忠(1963—)，男，博士，博士生导师，研究方向为测量数据处理。
First author: WANG Zhizhong(1963—), male, PhD, PhD supervisor, majors in surveying data processing.
E-mail: wzz8713761@163.com
通信作者：宋迎春
Corresponding author: SONG Yingchun
E-mail: csusyc@csu.edu.cn