

引文格式:王乐洋,温贵森.Partial EIV 模型的非负最小二乘方差分量估计[J].测绘学报,2017,46(7):857-865. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20160501.
WANG Leyang, WEN Guisen. Non-negative Least Squares Variance Component Estimation of Partial EIV Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2017, 46(7): 857-865. DOI: 10.11947/j.AGCS.2017.20160501.

Partial EIV 模型的非负最小二乘方差分量估计

王乐洋^{1,2,3}, 温贵森^{1,2}

1. 东华理工大学测绘工程学院, 江西 南昌 330013; 2. 流域生态与地理环境监测国家测绘地理信息局重点实验室, 江西 南昌 330013; 3. 江西省数字国土重点实验室, 江西 南昌 330013

Non-negative Least Squares Variance Component Estimation of Partial EIV Model

WANG Leyang^{1,2,3}, WEN Guisen^{1,2}

1. Faculty of Geomatics, East China University of Technology, Nanchang 330013, China; 2. Key Laboratory of Watershed Ecology and Geographical Environment Monitoring, NASG, Nanchang 330013, China; 3. Key Laboratory for Digital Land and Resources of Jiangxi Province, Nanchang 330013, China

Abstract: As an extended form of the errors-in-variables (EIV) model, and the weight matrix is easy to structure, the applicability is stronger when both non-random elements and random elements exist in the coefficient matrix. According to the inaccurate stochastic model in the Partial EIV model, the coefficient matrix and observation vector are used as a kind of data respectively. The least squares variance component estimation method based on Partial EIV model is used and the relevant calculated formulas and iterative algorithm are derived. Then the corresponded variance components are estimated. The non-negative least squares is used when the negative variance appears, then add constraint condition to correct the rand model, so the estimated parameters are more reasonable. The experiments show that the results obtained by the method of this paper and other methods are equivalent.

Key words: Partial EIV model; EIV model; least squares variance component estimation; non-negative least squares

Foundation support: National Natural Science Foundation of China (Nos.41664001; 41204003); Support Program for Outstanding Youth Talents in Jiangxi Province (No.20162BCB23050); National Key Research and Development Program (No.2016YFB0501405); Science and Technology Project of the Education Department of Jiangxi Province (No.GJJ150595); the Project of Key Laboratory for Digital Land and Resources of Jiangxi Province(No.DLLJ201705); Innovation Fund Designated for Graduate Students of ECUT (No.DHYC-2016005)

摘 要: Partial Errors-in-Variables(Partial EIV)模型是 EIV 模型的扩展形式,权阵构造简单,当系数矩阵中存在非随机元素和随机元素时,Partial EIV 模型的适用性更强。针对 Partial EIV 模型中随机模型不准确的情况,将系数矩阵和观测向量分别作为一类数据,本文在该模型的基础上,使用最小二乘方差分量估计方法,推导相关计算公式及迭代算法,分别估计出相应的方差分量估值。并对出现的负方差使用非负最小二乘理论,增加约束条件,对随机模型进行修正,得到更加合理的参数估值。试验结果表明,本文的方法与其他方差分量估计方法等价。

关键词: Partial EIV 模型; EIV 模型; 最小二乘方差分量估计; 非负最小二乘

中图分类号: P228 **文献标识码:** A **文章编号:** 1001-1595(2017)07-0857-09

基金项目: 国家自然科学基金(41664001; 41204003); 江西省杰出青年人才资助计划项目(20162BCB23050); 国家重点研发计划(2016YFB0501405); 江西省教育厅科技项目(GJJ150595); 江西

省数字国土重点实验室开放研究基金资助项目(DLLJ201705);东华理工大学研究生创新专项资金资助项目(DHYC-2016005)

总体最小二乘^[1]是顾及了系数矩阵误差的平差方法,是 Errors-in-Variables(EIV)^[2-3]模型的严密估计方法。在 EIV 模型的基础上,文献[4]将系数矩阵中不同的随机元素提取并作为参数进行求解,提出了 Partial Errors-in-Variables(Partial EIV)模型。文献[5]将 Partial EIV 模型进行转换,进行两步间接平差法得到参数估值,在形式上比文献[4]简单。文献[6]分析了 Partial EIV 模型算法与一般算法的优势分别为:①Partial EIV 模型是 EIV 模型的更一般的表达式;②Partial EIV 模型是将系数矩阵中不同的随机元素提取并作为参数进行求解,因此 Partial EIV 模型系数矩阵中待改正量的个数要小于或等于对应 EIV 模型中待改正量的个数,提高了计算效率;③便利了后续的精度评定。总体最小二乘法在近年来发展迅速^[7-13],在平差时随机模型的不准确对参数估值有很大的影响,方差分量估计可以对随机模型进行修正从而得到更加合理的参数估值。方差分量估计(VCE)方法主要有赫尔默特估计^[14-15](Helmert)、最小范数二次无偏估计^[16](MINQUE)、最优不变二次无偏估计^[17-18](BIQUE)及最小二乘方差分量估计^[19-22](LS-VCE);最小二乘方差分量估计(LS-VCE)方法是 Teunissen 提出,该方法使用的是最小二乘准则,经过转换将方差分量作为参数进行解算,得到的方差分量估值具有无偏性,且便利了后续工作。文献[20]给出了不同情形下的最小二乘方差分量估计方法并探索其特性。文献[21]将最小二乘方差分量估计应用于 EIV 模型中,将加权总体最小二乘参数解的表达式写成标准化的最小二乘形式,结合最小二乘方差分量估计方法确定方差分量估值,然而算例部分函数模型的系数矩阵既有随机元素又有非随机元素,使用更具有一般性的 Partial EIV 模型解算更具有代表性。与其他方差分量估计方法相似,在计算中可能出现负方差,函数模型多余观测量的不足和随机模型结构的不正当是出现负方差的主要原因,在最小二乘方差分量估计方法的基础上,文献[22]结合非负最小二乘理论,将非负最小二乘方差分量估计应用到 GPS 时间序列中,方差分量估计方法在本质上是相同的。文献[15]指出由 MINQUE 可以导

出严密的 Helmert 估计公式。文献[23]针对概括函数平差模型进行公式推导,总结了不同方差分量估计方法并指出最小二乘方差分量估计方法的一般性,通过公式推导得到了 MINQUE、Helmert 和 BIQUE 方法均是最小二乘方差分量估计的特例。相比于其他方法的方差分量计算公式推导,LS-VCE 方法过程更加简单、易于理解、具有较强的应用价值。

本文在文献[5]参数估计方法的基础上,结合最小二乘方差分量估计方法计算系数矩阵与观测向量的方差分量估值,在迭代过程中更新协因数阵,从而达到修正参数估值的效果。针对估计中出现的负方差,增加非负约束条件,使用非负最小二乘方差分量估计方法计算方差分量估值。通过算例试验对本文方法进行验证,并与已有方差分量估计方法进行比较。与文献[14]相比,本文方法不需要引入权比因子,在计算参数估值时迭代次数要更少,且方便了后续方差分量估值的精度评定,当计算中出现负方差时,文献[14]的方法则会出现不可估的现象。与文献[21]相比,本文方法继承了原有 Partial EIV 模型的优势。

1 Partial EIV 模型算法

在某些实际应用中,EIV^[24-25]模型中系数矩阵由一些非随机元素与随机元素组成,文献[4]对系数矩阵进行处理,提取了系数矩阵中的随机元素,将 EIV 模型改写成 Partial EIV 模型^[4]

函数模型

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \tilde{\mathbf{A}}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{e}_y = (\boldsymbol{\beta}^T \otimes \mathbf{I}_n)(\mathbf{h} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{a}}) + \mathbf{e}_y \\ \mathbf{a} &= \tilde{\mathbf{a}} + \mathbf{e}_a \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

随机模型

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_a \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_a \end{bmatrix} \right) \quad (2)$$

式中, $\tilde{\mathbf{A}}$ 表示 $n \times m$ 系数矩阵真值; \mathbf{h} 是一个确定的 $nm \times 1$ 常数向量;由 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中非随机元素和零组成; \mathbf{B} 是一个给定的 $nm \times t$ 矩阵; t 表示系数矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中随机元素的个数; \mathbf{y} 表示 $n \times 1$ 的观测向量; \mathbf{e}_y 表示观测向量误差; \mathbf{a} 是系数矩阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 中随机元素组成的 $t \times 1$ 列向量; $\tilde{\mathbf{a}}$ 表示其真值; \mathbf{e}_a 表示 \mathbf{a} 的随机误差; \mathbf{Q}_y 表示观测量误差的协因数阵; \mathbf{Q}_a

表示系数矩阵误差的协因数阵; σ_0^2 表示单位权方差; I_n 表示 $n \times n$ 单位矩阵。

文献[5]对式(1)进行变形得到

$$\begin{bmatrix} y - (\beta^T \otimes I_n)h \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\beta^T \otimes I_n)B \\ I_n \end{bmatrix} \tilde{a} + \begin{bmatrix} e_y \\ e_a \end{bmatrix} \quad (3)$$

式中,令 $e = \begin{bmatrix} e_y \\ e_a \end{bmatrix}$ 是 $n+t$ 列向量; $l = \begin{bmatrix} y - (\beta^T \otimes I_n)h \\ a \end{bmatrix}$;

$$D = \begin{bmatrix} (\beta^T \otimes I_n)B \\ I_n \end{bmatrix}; Q_e = \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_a \end{bmatrix}。$$

将观测值 a 作为参数进行平差,计算得到^[5]

$$\hat{a} = (D^T Q_e^{-1} D)^{-1} D^T Q_e^{-1} l \quad (4)$$

用参数估值 \hat{a} 重新构造系数矩阵估值 \hat{A} , 并计算系数矩阵改正数 $\hat{E}_A = A - \hat{A}$, A 表示由观测向量组成的矩阵, 计算协因数阵 Q_C ^[5,26]

$$Q_C = Q_y + (\hat{\beta}^T \otimes I_n) B Q_a B^T (\hat{\beta} \otimes I_n) \quad (5)$$

经计算得到^[5,26]

$$\hat{A}^T Q_C^{-1} (y - A\hat{\beta}) = 0 \quad (6)$$

为将法矩阵变成对称正定矩阵, 对式(6)加上和减去 $\hat{E}_A \hat{\beta}$ 并进行解算得到

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A - \hat{E}_A \\ y_1 &= y - \hat{E}_A \hat{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中, 根据协方差传播律可得到 $Q_{y_1} = Q_C$ 。进而可得到标准化最小二乘形式的参数估值表达式^[5,26]

$$\hat{\beta} = (\hat{A}^T Q_C^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{A}^T Q_C^{-1} y_1 \quad (8)$$

进而得到观测量估值及残差^[21]

$$\left. \begin{aligned} \hat{y} &= \hat{A} \hat{\beta} = P_A y_1 = (A - \hat{E}_A) \hat{\beta} \\ \hat{e} &= P_{1/\hat{A}} y_1 = y_1 - \hat{y} = y - \hat{A} \hat{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式中, $P_A = \hat{A} (\hat{A}^T Q_C^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{A}^T Q_C^{-1}$, $P_{1/\hat{A}} = I_n - \hat{A} (\hat{A}^T Q_C^{-1} \hat{A})^{-1} \hat{A}^T Q_C^{-1}$ 表示投影阵。

2 Partial EIV 模型的非负最小二乘方差分量估计

2.1 最小二乘方差分量估计

最小二乘方差分量估计^[19-23]由 Teunissen 提出, 使用的是最小二乘准则, 解算出的方差分量估值具有无偏性; 文献[14]在 Partial EIV 模型中引入权比因子, 使用赫尔默特方差分量估计方法确定权比因子, 并通过算例验证了与其他方差分量估计方法的等价性。文献[14]在参数计算过程中使用的是文献[4]的算法, 在表达形式上相对较复

杂, 且文献[5]指出该算法收敛较慢, 影响计算效率; 方差分量估计的本质是相同的, 都是对随机模型进行修正, 即修正观测值的权, 从而达到修正参数估值的效果, 最小二乘方差分量估计是更为一般的方差分量估计方法, 而且最小二乘方差分量估计有利于后续对方差分量估值的精度评定及其他方面的应用, 如出现负方差时可以增加约束条件使其成为附有约束条件的最小二乘平差, 处理出现负方差的情况, 而出现负方差时, 其他方差分量估计方法会出现不可估的情况。针对总体最小二乘中系数矩阵与观测量有不同方差分量的情况, 使用 LS-VCE 对随机模型进行修正更加合理。

由式(1)、式(2)及式(8)可知, 期望可以表示为 $E(y_1) = \hat{A} \hat{\beta}$, 引入矩阵 R 和向量 t , 矩阵 R 满足 $\hat{A}^T R = 0$ 或 $R^T \hat{A} = 0$, t 是一个均值为 0 的 $n-m$ 维向量, 参数 $\hat{\beta}$ 和观测向量 y_1 与 t 、 R 的关系式^[20,22]为

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\beta} \hat{A}^T Q_C^{-1} \\ R^T \end{bmatrix} y_1 \quad (10)$$

式中, Q_{β} 表示参数估值 $\hat{\beta}$ 的协因数阵。

由式(10)可知, 根据协因数传播律可得到向量 t 的协因数阵 $Q_t = R^T Q_C R$, 因此参数 $\hat{\beta}$ 及向量 t 的期望与协因数阵又可以表示为

$$\left. \begin{aligned} E \left(\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} \\ Q \left(\begin{bmatrix} \hat{\beta} \\ t \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} \hat{A}^T Q_C^{-1} \hat{A} & 0 \\ 0 & R^T Q_C R \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中, 协因数阵 Q_C 如式(5)所示, 经过相应的变换可以得到方差分量的关系^[19-22]为

$$E(y_{vh}) = A_{vh} \sigma \quad (12)$$

式中, A_{vh} 和 y_{vh} 均表示对矩阵进行 vh ^[21]操作后的矩阵和向量, σ 表示方差分量组成的向量。根据文献[20]可得

$$\sigma = \min \| A_{vh} \sigma - y_{vh} \|_{Q_{vh}^{-1}}^2 = N^{-1} L \quad (13)$$

式中, σ 为方差分量组成的向量; Q_{vh}^{-1} 为 σ 的协因数阵; $N = A_{vh}^T Q_{vh}^{-1} A_{vh}$ 为 $p \times p$ 的矩阵; $L = A_{vh}^T Q_{vh}^{-1} y_{vh}$ 为 $p \times 1$ 的列向量; p 表示方差分量的个数, 本文中 p 取值为 2。根据协方差传播律可得到方差分量估值的方差阵为 $Q_{\sigma} = N^{-1}$, 经过进一步的化简, 将其用 Partial EIV 模型中的协因数阵、残差等表示, 其形式^[19-23]为

$$\left. \begin{aligned} n_{kj} &= \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_C^{-1} \mathbf{P}_{1/\hat{A}} \mathbf{Q}_l \mathbf{Q}_C^{-1} \mathbf{P}_{1/\hat{A}}) \\ k, l &= 1, 2, \dots, p, \\ l_k &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}^T \mathbf{Q}_C^{-1} \mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_C^{-1} \hat{\mathbf{e}} - \text{tr}(\mathbf{Q}_k \mathbf{Q}_C^{-1} \mathbf{P}_{1/\hat{A}} \mathbf{Q}_0 \mathbf{Q}_C^{-1} \mathbf{P}_{1/\hat{A}}) \\ k &= 1, 2, \dots, p \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中, n_{kj} 、 l_k 分别表示矩阵 \mathbf{N} 、 \mathbf{L} 中的某一元素;
 \mathbf{Q}_k 、 \mathbf{Q}_l 都表示为系数矩阵或观测量的协因数阵;
 \mathbf{Q}_0 为已知的矩阵, 一般为零矩阵。

在 Partial EIV 模型中, 观测向量和系数矩阵在
某些情况具有不同的方差分量, 对于式(2)的随机模型存在

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{y}) &= \mathbf{Q}_y = \sigma_1^2 \mathbf{Q}_{y_1} \\ \mathbf{D}(\mathbf{a}) &= \mathbf{Q}_a = \sigma_2^2 \mathbf{Q}_{a_1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

式中, σ_1 、 σ_2 分别为观测向量和系数矩阵误差的
方差分量; \mathbf{Q}_{y_1} 、 \mathbf{Q}_{a_1} 为给定的观测量和系数矩阵
的协因数阵。

将式(5)改写成线性求和形式, 即

$$\mathbf{Q}_C = \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 \mathbf{Q}_k = \sigma_1^2 \mathbf{Q}_{y_1} + \sigma_2^2 (\hat{\boldsymbol{\beta}}^T \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{B} \mathbf{Q}_{a_1} \mathbf{B}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}} \otimes \mathbf{I}_n) \quad (16)$$

Partial EIV 模型是顾及了系数矩阵误差的
总体最小二乘模型, 文献[20]从经典的 Gauss-
Markov 模型出发分析了最小二乘方差分量估计
方法, 相比于 Partial EIV 模型的数学模型,
Gauss-Markov 的数学模型可以表示为

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{y} &= \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{e}_y \\ \mathbf{Q}_y &= \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 \mathbf{Q}_k \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对式(17)进行平差解算可得到参数的表达式

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{y} \quad (18)$$

误差向量 \mathbf{e}_y 可以表示成多个分量求和的形
式。在 Partial EIV 模型的解算中, 式(8)和式
(18)与 Gauss-Markov 模型解算得到的参数表
达式及协因数阵的形式相同, 这与文献[21]中 EIV
模型的最小二乘方差分量估计是一致的。

迭代计算分为参数估计和方差分量估计, 具
体的迭代步骤为: 数据准备: \mathbf{A} 、 \mathbf{y} 、 \mathbf{Q}_y 、 \mathbf{Q}_a 、 \mathbf{h} 、 \mathbf{a} 、
 \mathbf{B} 、收敛条件 $\epsilon = 10^{-10}$ 。

(1) 用最小二乘法求解模型参数初值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(0)}$, 给
定初值 $\mathbf{a}^{(0)}$, 构造矩阵 \mathbf{l} 、 \mathbf{D} ;

(2) 给定方差分量初值 $\sigma^{(0)} = [\sigma_1^{2(0)} \ \sigma_2^{2(0)}]^T$;
设计迭代次数 $i = 0$;

外循环:

(3) 用式(15)更新 \mathbf{Q}_y 和 \mathbf{Q}_a ; 设计迭代次数
 $j = 0$;

内循环:

(1) 更新 \mathbf{Q}_e , 由式(4)计算 $\hat{\mathbf{a}}^{(j+1)}$;

(2) 由式(5)更新 \mathbf{Q}_C ;

(3) 由 $\hat{\mathbf{a}}^{(j+1)}$ 重新构造矩阵 $\hat{\mathbf{A}}$, 计算 $\hat{\mathbf{E}}_A = \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}$, 更新 $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{E}}_A \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}$;

(4) 由式(8)计算参数 $\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j+1)}$, 更新矩阵 \mathbf{l} 、 \mathbf{D} ,
 $j = j + 1$;

(5) 重复步骤 ① 至步骤 ④ 直至满足
 $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j+1)} - \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j)}\| < \epsilon$ 且 $\|\hat{\mathbf{a}}^{(j+1)} - \hat{\mathbf{a}}^{(j)}\| < \epsilon$ 时迭代
终止。

(4) 更新 $\mathbf{Q}_k = (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j+1)T} \otimes \mathbf{I}_n) \mathbf{B} \mathbf{Q}_{a_1} \mathbf{B}^T (\hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j+1)} \otimes \mathbf{I}_n)$;

(5) 由式(16)更新 \mathbf{Q}_C ;

(6) 计算 $\mathbf{P}_{1/\hat{A}(j+1)} = \mathbf{I}_n - \hat{\mathbf{A}}^{(j+1)} (\hat{\mathbf{A}}^{(j+1)T} \mathbf{Q}_C^{-1} \hat{\mathbf{A}}^{(j+1)})^{-1} \hat{\mathbf{A}}^{(j+1)T} \mathbf{Q}_C^{-1}$ 和 $\hat{\mathbf{e}} = \mathbf{P}_{1/\hat{A}(j+1)} (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{E}}_A^{(j+1)} \hat{\boldsymbol{\beta}}^{(j+1)})$;

(7) 由式(14)更新 \mathbf{N} 和 \mathbf{L} , 计算 $\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{L}$,
 $i = i + 1$;

(8) 重复步骤 (3) 到步骤 (7) 直至
 $\|\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(i)}\| < \epsilon$ 时迭代终止。

2.2 非负最小二乘方差分量估计

最小二乘方差分量估计方法是根据最小二乘
准则使得其误差平方和取最小, 与其他方差分量
估计方法类似, 在进行方差分量解算时也会出现
负方差, 这与方差分量的自身含义是相互冲突的,
出现负方差的原因有两种^[22]: ①函数模型观测量的
不足, 即多余观测量的不足。多余观测量也叫
自由度, 增加模型的多余观测量可以提高数据解
算精度。②结构不正当的随机模型, 随机模型又
表现在观测值的权中, 然而观测数据初始的权往
往是不精确的, 严重影响了平差结果的精度。非
负最小二乘方法^[27-28]是在最小二乘准则下增加
非负约束条件而得, 在最小二乘方差分量估计的
基础上增加约束条件使得方差分量非负, 因此可
以将非负最小二乘方差分量估计作为附有约束条
件的最小二乘问题, 其准则^[22,28]为

$$\boldsymbol{\sigma} = \min_{\sigma \geq 0} \|\mathbf{A}_{\text{vh}} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{y}_{\text{vh}}\|_{\mathbf{Q}_{\text{vh}}^{-1}}^2 = \min_{\sigma \geq 0} (\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}) \quad (19)$$

令 $F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma}$, $F(\boldsymbol{\sigma})$ 是一个凸函

数。式(19)就等价于求解凸函数最小值问题,在 Karush-Kuhn-Tucker(KKT)^[28]条件下构造拉格朗日函数得到

$$L(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{N} \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (20)$$

式中, \boldsymbol{u} 是拉格朗日乘子,对式(20)求偏导计算得到

$$\boldsymbol{u}^{i+1} = \boldsymbol{N} \boldsymbol{\sigma}^{i+1} - \boldsymbol{L} \quad (21)$$

采用文献[28]的非负最小二乘方法,令 σ_k 是向量 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_p]^T$ 中的第 k 个元素,去除 k 之外剩余的元素用 $\boldsymbol{K} = \{1, 2, \cdots, p\} \setminus \{k\}$ 表示;用式(13)计算出方差分量,并对里面的元素进行约束,即

$$\hat{\sigma}_k^{i+1} = \max(0, \hat{\sigma}_k^i - u_k^i / n_{kk}) \quad (22)$$

式中, $\hat{\sigma}_k^{i+1}$ 表示 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^{i+1}$ 中的第 k 个元素; $\hat{\sigma}_k^i$ 表示 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}^i$ 中的第 k 个元素; u_k^i 表示 $\hat{\boldsymbol{u}}^i$ 中的第 k 个元素。

对 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 中的某一元素进行约束,剩下的元素保持不变,因此式(21)改写成^[27]

$$\boldsymbol{u}^{i+1} = \boldsymbol{u}^i + (\sigma_k^{i+1} - \sigma_k^i) \boldsymbol{n}(:, k) \quad (23)$$

式中, $\boldsymbol{n}(:, k)$ 表示矩阵 \boldsymbol{N} 的第 k 列。

由式(23)可以看出,迭代计算出的方差分量估值,若某一分量出现负值,通过式(23)进行约束。非负最小二乘方差分量估计可以当成附有约束条件的最小二乘方差分量估计,其约束条件可以表达成

$$\boldsymbol{C}_1^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad (24)$$

式中, \boldsymbol{C}_1^T 是 $z \times p$ 的矩阵; z 表示 $\boldsymbol{\sigma}$ 中 0 元素的个数。

在计算参数协因数阵时,根据附有约束条件的平差方法,由协因数传播律可得到方差分量估值的协因数阵为

$$\boldsymbol{Q}_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}} = \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{P}_{1/C_1} \quad (25)$$

式中, $\boldsymbol{P}_{1/C_1} = \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{C}_1 (\boldsymbol{C}_1^T \boldsymbol{N}^{-1} \boldsymbol{C}_1)^{-1} \boldsymbol{C}_1^T \boldsymbol{N}^{-1}$ 。

具体迭代步骤为:

数据准备同最小二乘方差分量估计,在计算出参数估值 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ 后,在最小二乘方差分量估计的基础上使用非负最小二乘原理。

(1) 给定方差分量初值 $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = [\sigma_1^{2(0)}, \sigma_2^{2(0)}]^T$, 设计迭代次数 $i=0$;

外循环:

(2) 计算 $\boldsymbol{Q}_C, \boldsymbol{P}_{1/A} = \boldsymbol{I}_n - \hat{\boldsymbol{A}} (\hat{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{Q}_C^{-1} \hat{\boldsymbol{A}})^{-1} \hat{\boldsymbol{A}}^T \boldsymbol{Q}_C^{-1}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}_y = \boldsymbol{P}_{1/A} (\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{E}}_A \hat{\boldsymbol{\beta}})$;

(3) 用式(14)更新 \boldsymbol{N} 和 \boldsymbol{L} ;令 $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = \mathbf{0}, \boldsymbol{u}^{(0)} =$

$-\boldsymbol{L}$;设计迭代次数 $j=0$;

内循环:

(1) 用式(22)计算 $\boldsymbol{\sigma}^{(j+1)}$;式(23)计算 $\boldsymbol{u}^{(j+1)}$;

(2) 更新 $\boldsymbol{u}^{(j)} = \boldsymbol{u}^{(j+1)}, j=j+1$;

(3) 重复步骤①到②直至 $\|\boldsymbol{\sigma}^{(j+1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(j)}\| < \epsilon$ 时迭代终止。

(4) 更新 $\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} = \boldsymbol{\sigma}^{(j+1)}, i=i+1$;

(5) 重复步骤(2)到(4)直至 $\|\boldsymbol{\sigma}^{(i+1)} - \boldsymbol{\sigma}^{(i)}\| < \epsilon$ 时迭代终止;

(6) 计算矩阵 \boldsymbol{C}_1^T 和 \boldsymbol{P}_{1/C_1} ;

(7) 由式(25)计算方差分量估值的协因数阵。

3 算例与分析

3.1 算例 1

数据采用文献[5,21]直线拟合数据,已知坐标观测值 (x_i, y_i) 和相应的权值 (p_{x_i}, p_{y_i}) ,见表 1。

表 1 坐标观测值及相应的权值^[5,21]

Tab.1 Coordinate observations and corresponding weights^[5,21]

点号	观测数据		权值	
	y_i	x_i	p_{y_i}	p_{x_i}
1	5.9	0.0	1.0	1 000.0
2	5.4	0.9	1.8	1 000.0
3	4.4	1.8	4.0	500.0
4	4.6	2.6	8.0	800.0
5	3.5	3.3	20.0	200.0
6	3.7	4.4	20.0	80.0
7	2.8	5.2	70.0	60.0
8	2.8	6.1	70.0	20.0
9	2.4	6.5	100.0	1.8
10	1.5	7.4	500.0	1.0

直线拟合的模型^[5,21]为

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{10} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{y_1} \\ e_{y_2} \\ \vdots \\ e_{y_{10}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{10} & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{x_1} & 0 \\ e_{x_2} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_{x_{10}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$[\xi_1 \ \xi_2]^T$ 为待估参数,直线拟合模型是常见的含有非随机元素与随机元素的模型,在使用 Partial EIV 模型进行解算时还需要给出向量 \boldsymbol{h} 和固定矩阵 \boldsymbol{B} ,由式(26)可知,向量 \boldsymbol{h} 和矩阵 \boldsymbol{B} 的形式为

$$\mathbf{h}=\left[\underbrace{0\ 0}_{10}\ \underbrace{1\ 1\ \cdots\ 1}_{10}\right]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathbf{B}=\left[\begin{array}{c}1\\0\end{array}\right]\otimes\mathbf{I}_{10}$$

(27)

权阵 $\mathbf{p}_a=\text{diag}([p_{x_1}\ p_{x_2}\ \cdots\ p_{x_{10}}]^{\text{T}})$, $\mathbf{p}_y=\text{diag}([p_{y_1}\ p_{y_2}\ \cdots\ p_{y_{10}}]^{\text{T}})$, 收敛条件为 $\epsilon=10^{-10}$, 分别用文献[5]的方法(WTLS)、文献[21]方法(方法 1)、文献[14]方法(方法 2)以及本文方法计算参数估值及方差分量估值, 得到的结果见表 2, 其中 $\hat{\sigma}_0^2$ 表示单位权方差分量估值, $\hat{\sigma}_x^2$ 、 $\hat{\sigma}_y^2$ 表示系数矩阵与观测量的方差分量估值, $\text{var}(\hat{\sigma}_x^2)$ 、 $\text{var}(\hat{\sigma}_y^2)$ 表示方差分量估值 $\hat{\sigma}_x^2$ 、 $\hat{\sigma}_y^2$ 的方差, 可以发现得到的方差分量估值相等, 且相对应方差分量估值的方差也相等; 方法 1 与本文方法的方差分量迭代过程变化相同(如图 1 所示), 两种方法迭代次数都为 21 次, 且文献[14]方差分量估计方面迭代次数也为 21(迭代中收敛条件都取为 $\epsilon=10^{-10}$), 而参数估计方面文献[14]需要 267 次, 本文只需要 94 次。

表 2 算例 1 中不同方法的解算结果

Tab.2 Results from different methods of the first example

结果	WTLS	方法 1	方法 2	本文方法
$\hat{\xi}_1$	-0.480 533 407 4	-0.489 907 073	-0.489 907 073	-0.489 907 073
$\hat{\xi}_2$	5.479 910 224 0	5.527 557 906	5.527 557 906	5.527 557 906
$\hat{\sigma}_0^2$	1.483 294 149 3			
$\hat{\sigma}_x^2$		0.656 376 35	0.656 376 35	0.656 376 35
$\hat{\sigma}_y^2$		1.821 311 51	1.821 311 51	1.821 311 51
$\text{var}(\hat{\sigma}_x^2)$		0.813 650 67	0.813 650 67	0.813 650 67
$\text{var}(\hat{\sigma}_y^2)$		1.178 433 63	1.178 433 63	1.178 433 63

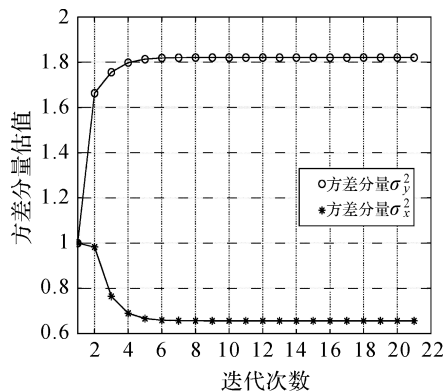


图 1 算例 1 的方差分量估值变化图

Fig.1 The changes of estimates variance components of the first example

文献[14]与文献[15]推导了方差分量估值的方差公式为

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\theta}})=2\sigma_0^4\bar{\mathbf{S}}^{-1}$$

(28)

式中, $\bar{\mathbf{S}}^{-1}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}\\S_{21}&S_{22}\end{bmatrix}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 表示方差分量估值组成的向量, 文献[14]再根据确定的权比因子计算方差; 而在最小二乘方差分量估计中, 由式(13)根据协方差传播律可得, 更简单且更易获取, 其形式为

$$\text{var}(\hat{\boldsymbol{\sigma}})=\mathbf{N}^{-1}$$

(29)

方差分量估计是针对随机模型不准确进而修正随机模型并再次平差的方法, 本文以 Partial EIV 模型为基础的的最小二乘方差分量估计方法重新确定了两类观测值的权阵, 得到的权值见表 3, 可以发现与文献[14]和文献[21]重新确定的权值是相等的。

表 3 修正后的观测值权值

Tab.3 The observations weights of corrected

点号	初始权值		修正权值	
	p_{y_i}	p_{x_i}	\hat{p}_{y_i}	\hat{p}_{x_i}
1	1.0	1 000.0	0.55	1 523.52
2	1.8	1 000.0	0.99	1 523.52
3	4.0	500.0	2.20	761.76
4	8.0	800.0	4.39	1218.81
5	20.0	200.0	10.98	304.70
6	20.0	80.0	10.98	121.88
7	70.0	60.0	38.43	91.41
8	70.0	20.0	38.43	31.47
9	100.0	1.8	54.91	2.74
10	500.0	1.0	274.53	1.52

3.2 算例 2

模拟一个二维仿射变换, 对文献[29]的数据进行改化, 已知 6 个转换参数真值 $a_1=0.9, b_1=-0.8, c_1=1, a_2=0.6, b_2=0.7, c_2=0.5$ 和原始坐标、目标坐标的真值, 相应的协因数阵为 $\mathbf{Q}_a=0.005\cdot\text{diag}([1\ 1\ 2\ 2\ 3\ 3\ 1\ 1\ 5\ 5\ 4\ 4\ 2\ 2\ 7\ 7\ 1\ 1\ 8\ 8\ 3\ 3\ 6\ 6]^{\text{T}})$, $\mathbf{Q}_y=0.005\cdot\text{diag}([1\ 1\ 3\ 3\ 6\ 6\ 1\ 1\ 1\ 1\ 8\ 8\ 4\ 4\ 3\ 3\ 6\ 6\ 5\ 5\ 4\ 4\ 5\ 5\ 2\ 2]^{\text{T}})$, 用 Matlab 软件 mvnrnd 函数给真值加上均值为 0, 协方差分别为 \mathbf{Q}_y 和 $3\mathbf{Q}_a$ 的随机误差, 得到随机一组坐标值见表 4。

表 4 原始坐标和目标坐标模拟坐标值

Tab.4 Simulated coordinates in start system and target system

点号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
原始坐标系													
u_s	0.85	1.03	1.10	1.37	2.32	2.34	2.77	3.04	2.96	2.51	1.84	1.73	2.02
v_s	1.07	1.75	3.25	3.43	4.33	3.23	3.02	1.20	0.89	0.60	0.09	0.75	2.14
目标坐标系													
u_t	1.01	0.35	-0.51	-0.32	-0.36	0.65	1.37	2.05	3.02	2.98	2.93	1.91	1.06
v_t	6.35	6.94	7.91	8.31	9.10	9.31	8.76	8.27	7.67	6.90	6.07	6.04	7.72

二维仿射变换模型^[29]为

$$\begin{bmatrix} u_{t1} \\ v_{t1} \\ u_{t2} \\ v_{t2} \\ \vdots \\ u_{ti} \\ v_{ti} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{s1} & v_{s1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{s1} & v_{s1} & 1 \\ u_{s2} & v_{s2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{s2} & v_{s2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{si} & v_{si} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_{si} & v_{si} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (30)$$

表 4 中提供了 26 组坐标,向量 \boldsymbol{h} 和确定矩阵 \boldsymbol{B} 、 \boldsymbol{y} 、 \boldsymbol{a} 的形式分别为

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} u_{t1} \\ v_{t1} \\ u_{t2} \\ v_{t2} \\ \vdots \\ u_{t13} \\ v_{t13} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} u_{s1} \\ v_{s1} \\ u_{s2} \\ v_{s2} \\ \vdots \\ u_{s13} \\ v_{s13} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \\ h_5 \\ h_6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_3 \\ \boldsymbol{B}_4 \\ \boldsymbol{B}_5 \\ \boldsymbol{B}_6 \end{bmatrix} \quad (31)$$

式中, $\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_4 = \boldsymbol{h}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{h}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{h}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{I}_{13} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{I}_{13} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_4 = \boldsymbol{I}_{13} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_5 = \boldsymbol{I}_{13} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{B}_6 = \boldsymbol{I}_{13} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

数据准备: \boldsymbol{h} 、 \boldsymbol{B} 、 \boldsymbol{y} 、 \boldsymbol{a} 、 \boldsymbol{p}_a 、 \boldsymbol{p}_y , 权阵为协因数阵的逆 $\boldsymbol{p}_a = \boldsymbol{Q}_a^{-1}$, $\boldsymbol{p}_y = \boldsymbol{Q}_y^{-1}$, 收敛条件为 $\epsilon =$

10^{-10} ; 计算得到的方差分量估值见表 5, 因为该算例出现负方差, 导致文献[14]出现不可估现象, 且本文与文献[21]方法等价, 因此表 5 中只列出了最小二乘方差分量估计(LSVCE)及非负最小二乘方差分量估计(NNLSVCE)进行计算, 相应的方差分量估值变化图见图 2。其中 $\hat{\sigma}_t^2$ 表示目标坐标系(观测量)的方差分量, $\hat{\sigma}_s^2$ 表示原始坐标系(系数矩阵)的方差分量, $\text{var}(\hat{\sigma}_t^2)$ 表示 $\hat{\sigma}_t^2$ 的方差, $\text{var}(\hat{\sigma}_s^2)$ 表示 $\hat{\sigma}_s^2$ 的方差。

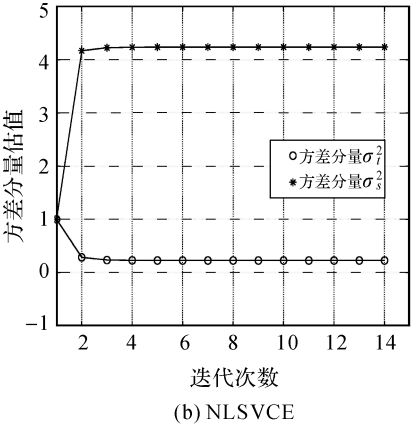
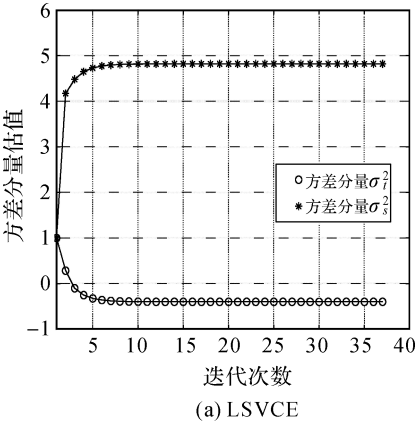


图 2 算例 2 的方差分量估值变化图

Fig.2 The changes of estimates variance components of the second example

表 5 算例 2 中不同方法得到的结果

Tab.5 Results from different methods of the second example

	LSVCE	NNLSVCE
$\hat{\sigma}_1^2$	-0.399 286 137 4	0.227 286 402 8
$\hat{\sigma}_2^2$	4.820 013 579 0	4.237 899 822 7
var($\hat{\sigma}_1^2$)		2.417 189 514 5
var($\hat{\sigma}_2^2$)		5.634 915 234 2

图中, LS-VCE 的迭代次数都为 37 次, NNLSVCE 的迭代次数为 14 次,而在使用文献[14]方法进行求解时,因为方差分量出现负值的现象,计算时则出现不收敛的情况。

3.3 算例分析

(1) 由表 2 可以看出本文方法与文献[14、21]得到的待估参数结果及方差分量估值相等,对应的方差分量估值方差也相等,图 1 显示了方差分量估值的变化图,两种方法的迭代次数都为 21 次,表 3 显示了修正方差分量所对应的权值。在不考虑方差分量估计情况下,文献[5]的参数估计需要迭代 7 次,文献[30]需要迭代 8 次;文献[14]计算中进行参数估计时需要迭代 267 次,而本文只需要 94 次,在一定程度提高了计算效率,且在计算方差时本文只需要根据协方差传播律获得,如式(25),相对更简单。

(2) 用最小二乘方法计算算例 2 方差分量估值时出现负值,而文献[14]的方法则出现不可估的情况,使用非负最小二乘理论得到的方差分量估值变化图见图 2。在非负约束下,通过解算其余方差分量估值从而达到准则下的整体最优解。非负最小二乘方差分量估计可以看成为附有限制条件的间接平差,在结合 LS-VCE 后,非负方差分量估计实质上就为非负最小二乘估计,因此本文方法与文献[22]方法是等价的。

(3) Partial EIV 模型是将系数矩阵中的重复的随机元素提取,使得模型需要改正的待改正量个数相对更少。对于 Partial EIV 模型的随机模型,其协因数阵构造简单,更具有一般性的 Partial EIV 模型在解算海量数据时更能体现其优势。在式(5)计算协因数阵时, BQ_aB^T 与 EIV 模型的系数矩阵的协因数阵 Q_A 相等,与文献[30]求解公式一致,相应的在进行方差分量估计时是等价的。

4 结 论

本文以 Partial EIV 模型为基础,当观测数据

的随机模型不准确时,结合最小二乘方差分量估计方法对随机模型进行修正,推导了以 Partial EIV 模型为基础的最小二乘方差分量估计公式,将观测向量误差和系数矩阵误差分别作为一类数据,从而计算出两个方差分量估值;并且当方差分量估值出现负的时候,使用非负最小二乘理论,增加非负约束条件,可以处理方差分量出现负值的现象。计算过程分为参数估计与方差分量估计,Partial EIV 模型的优势是减少了待估参数的个数,如算例 1 直线拟合在不考虑方差分量估计时 Partial EIV 模型解算的迭代次数比 EIV 模型少,虽然对 Partial EIV 模型进行解算之后参数的表达式与文献[29]等价,但是使用更具一般性的 Partial EIV 模型更能体现其代表性。将 Partial EIV 模型与最小二乘方差分量估计结合可以得到与 EIV 模型一样的结果,但在参数估计上使用 Partial EIV 模型一定程度上提高运算效率,该方法继承了 Partial EIV 模型原有的优点,对总体最小二乘理论进行了必要的完善。本文只讨论了 Partial EIV 模型系数矩阵与观测向量不相关时出现负方差的处理,而针对相关观测情况及负方差产生的具体原因及分析是今后需要研究的工作。

参考文献:

[1] GOLUB G H, VAN LOAN C F. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1980, 17(6): 883-893.

[2] 王乐洋. 基于总体最小二乘的大地测量反演理论及应用研究[J]. 测绘学报, 2012, 41(4): 629.

WANG Leyang. Research on Theory and Application of Total Least Squares in Geodetic Inversion[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2012, 41(4): 629.

[3] 王乐洋, 许才军. 总体最小二乘研究进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(7): 850-856.

WANG Leyang, XU Caijun. Progress in Total Least Squares[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2013, 38(7): 850-856.

[4] XU Peiliang, LIU Jingnan, SHI Chuang. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-Variables Models: Algorithm and Statistical Analysis[J]. Journal of Geodesy, 2012, 86(8): 661-675.

[5] 王乐洋, 余航, 陈晓勇. Partial EIV 模型的解法[J]. 测绘学报, 2016, 45(1): 22-29. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20140560.

WANG Leyang, YU Hang, CHEN Xiaoyong. An Algorithm for Partial EIV Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2016, 45(1): 22-29. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20140560.

[6] 刘经南, 曾文宪, 徐培亮. 整体最小二乘估计的研究进展[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2013, 38(5): 505-512.

LIU Jingnan, ZENG Wenxian, XU Peiliang. Overview of

- Total Least Squares Methods[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(5): 505-512.
- [7] 王乐洋, 于冬冬. 病态总体最小二乘问题的虚拟观测解法[J]. *测绘学报*, 2014, 43(6): 575-581. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0091.
- WANG Leyang, YU Dongdong. Virtual Observation Method to Ill-posed Total Least Squares Problem[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(6): 575-581. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0091.
- [8] 王乐洋, 许才军, 鲁铁定. 病态加权总体最小二乘平差的岭估计解法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2010, 35(11): 1346-1350.
- WANG Leyang, XU Caijun, LU Tieding. Ridge Estimation Method in Ill-posed Weighted Total Least Squares Adjustment [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2010, 35(11): 1346-1350.
- [9] 王乐洋, 于冬冬, 吕开云. 复数域总体最小二乘平差[J]. *测绘学报*, 2015, 44(8): 866-876. DOI: 10.11947/j.AGCS.2015.20130701.
- WANG Leyang, YU Dongdong, LÜ Kaiyun. Complex Total Least Squares Adjustment[J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2015, 44(8): 866-876. DOI: 10.11947/j.AGCS.2015.20130701.
- [10] FANG Xing. Weighted Total Least Squares: Necessary and Sufficient Conditions, Fixed and Random Parameters [J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(8): 733-749.
- [11] FANG Xing. Weighted Total Least Squares Solutions for Applications in Geodesy [D]. Germany: Leibniz Universität Hannover, 2011.
- [12] SNOW K. Topics in Total Least-squares Adjustment within the Errors-in-variables Model: Singular Cofactor Matrices and Prior Information[D]. Ohio: The Ohio State University, 2012.
- [13] SCHAFFRIN B, WIESER A. On Weighted Total Least-Squares Adjustment for Linear Regression[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(7): 415-421.
- [14] WANG Leyang, XU Guangyu. Variance Component Estimation for Partial Errors-in-Variables Models[J]. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 2016, 60(1): 35-55.
- [15] 崔希璋, 於宗俦, 陶本藻, 等. 广义测量平差[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2005.
- CUI Xizhang, YU Zongchou, TAO Benzao, et al. Generalized Surveying Adjustment[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2005.
- [16] XU Peiliang, LIU Jingnan. Variance Components in Errors-in-Variables Models: Estimability, Stability and Bias Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2014, 88(8): 719-734.
- [17] 刘志平, 张书毕. 方差-协方差分量估计的概括平差因子法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2013, 38(8): 925-929.
- LIU Zhiping, ZHANG Shubi. Variance-covariance Component Estimation Method Based on Generalization Adjustment Factor[J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(8): 925-929.
- [18] 王乐洋, 许才军, 张朝玉. 一种确定联合反演中相对权比的两步法[J]. *测绘学报*, 2012, 41(1): 19-24.
- WANG Leyang, XU Caijun, ZHANG Chaoyu. A Two-step Method to Determine Relative Weight Ratio Factors in Joint Inversion [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2012, 41(1): 19-24.
- [19] AMIRI-SIMKOOEI A. Least-squares Variance Component Estimation: Theory and GPS Applications [D]. Delft: Delft University of Technology, 2007.
- [20] TEUNISSEN P J G, AMIRI-SIMKOOEI A R. Least-squares Variance Component Estimation[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(2): 65-82.
- [21] AMIRI-SIMKOOEI A R. Application of Least Squares Variance Component Estimation to Errors-in-Variables Models[J]. *Journal of Geodesy*, 2013, 87(10-12): 935-944.
- [22] AMIRI-SIMKOOEI A R. Non-negative Least-squares Variance Component Estimation with Application to GPS Time Series[J]. *Journal of Geodesy*, 2016, 90(5): 451-466.
- [23] 赵俊, 郭建锋. 方差分量估计的通用公式[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2013, 38(5): 580-583, 588.
- ZHAO Jun, GUO Jianfeng. A universal Formula of Variance Component Estimation [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2013, 38(5): 580-583, 588.
- [24] VAN HUFFEL S, VANDEWALLE J. The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematic, 1991.
- [25] 曾文宪. 系数矩阵误差对 EIV 模型平差结果的影响研究 [D]. 武汉: 武汉大学, 2013.
- ZENG Wenxian. Effect of the Random Design Matrix on Adjustment of An EIV Model and Its Reliability Theory [D]. Wuhan: Wuhan University, 2013.
- [26] 许光煜. Partial EIV 模型的总体最小二乘方法及应用研究 [D]. 南昌: 东华理工大学, 2016.
- XU Guangyu. The Total Least Squares Method and Its Application of Partial Errors-in-variables Model [D]. Nanchang: East China University of Technology, 2016.
- [27] LAWSON C L, HANSON R J. Solving Least Squares Problems[M]. Philadelphia: SIAM, 1995.
- [28] FRANC V, HLAVÁČ V, NAVARA M. Sequential Coordinate-wise Algorithm for the Non-negative Least Squares Problem[C]// *Proceedings of the 11th International Conference on Computer Analysis of images and Patterns*. Berlin Heidelberg: Springer, 2005: 407-414.
- [29] MAHBOUB V. On Weighted Total Least-Squares for Geodetic Transformations[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(5): 359-367.
- [30] AMIRI-SIMKOOEI A, JAZAERI S. Weighted Total Least Squares Formulated by Standard Least Squares Theory [J]. *Journal of Geodetic Science*, 2012, 2(2): 113-124.
- (责任编辑:陈品馨)
-
- 收稿日期: 2016-10-11
修回日期: 2017-05-27
第一作者简介: 王乐洋(1983—),男,博士,副教授,主要研究方向为大地测量反演及大地测量数据处理。
First author: WANG Leyang (1983—), male, PhD, associate professor, majors in geodetic inversion and geodetic data processing.
E-mail: wleyang@163.com