

引文格式:姚宜斌,熊朝晖,张豹,等.顾及设计矩阵误差的 AR 模型新解法[J].测绘学报,2017,46(11):1795-1801. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20170004.
YAO Yibin,XIONG Zhaohui,ZHANG Bao,et al.A New Method to Solving AR Model Parameters Considering Random Errors of Design Matrix[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica,2017,46(11):1795-1801. DOI:10.11947/j.AGCS.2017.20170004.

顾及设计矩阵误差的 AR 模型新解法

姚宜斌^{1,2,3},熊朝晖¹,张 豹¹,张 良¹,孔 建⁴

1. 武汉大学测绘学院,湖北 武汉 430079; 2. 武汉大学地球空间环境与大地测量教育部重点实验室,湖北 武汉 430079; 3. 地球空间信息技术协同创新中心,湖北 武汉 430079; 4. 武汉大学中国南极测绘研究中心,湖北 武汉 430079

A New Method to Solving AR Model Parameters Considering Random Errors of Design Matrix

YAO Yibin^{1,2,3},XIONG Zhaohui¹,ZHANG Bao¹,ZHANG Liang¹,KONG Jian⁴

1. School of Geodesy and Geomatics, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 2. Key Laboratory of Geospace Environment and Geodesy, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430079, China; 3. Collaborative Innovation Center for Geospatial Technology, Wuhan 430079, China; 4. Chinese Antarctic Center of Surveying and Mapping, Wuhan 430079, China

Abstract: The ordinary least square method could not solve the problem that the error exist both in design matrix and observation vector while compute parameter values of AR model. In this article, a new method is proposed which consider the random errors of design matrix. The source of design matrix and observation vector is same and the amount of parameters contain error can be equal by introducing virtual observation. Then, this problem could be solved under the framework of normal least square by equivalence transformation of observation equation. The result of this new method is superior to SVD method and normal least square method by simulation date and observation data which verify the feasibility and effectiveness of this method.

Key words: AR model; design matrix error; TLS; virtual observations; SVD method

Foundation support: The General Program of National Natural Science Foundation of China(Nos.41274022; 41574028); Natural Science Foundation for Distinguished Young Scholars of Hubei Province of China (No.2015CFA036)

摘 要:在自回归模型求解中,设计矩阵和观测值均存在误差,传统的最小二乘法不能很好地解决这一问题。本文提出了一种顾及设计矩阵误差的 AR 模型新解法,通过引入虚拟观测值,使观测向量与设计矩阵不仅同源而且带误差的元素个数相同,然后通过对观测方程进行等价变换巧妙实现了在最小二乘框架下求解自回归问题。利用模拟数据及实测数据分别对新算法进行了内符合精度检验,并利用实测数据对新算法进行外符合精度检验,结果表明新算法得到的结果显著优于奇异值分解(singular value decomposition, SVD)解法及传统最小二乘解法,验证了算法的精度和有效性。

关键词: AR 模型; 设计矩阵误差; 整体最小二乘; 虚拟观测值; 奇异值分解

中图分类号:P228 **文献标识码:**A **文章编号:**1001-1595(2017)11-1795-07

基金项目:国家自然科学基金(41274022;41574028);湖北省杰出青年科学基金(2015CFA036)

平差的实际问题中常存在设计矩阵由含有误差的观测值构成,传统最小二乘方法在求解此类模型的过程中,因忽略设计矩阵中实际存在的误差而具有理论的不完备性。考虑设计矩阵误差,

将所有观测值改正数平方和最小作为平差准则的求解方法最初由 Adcock 于 1877 年提出^[1]。1980 年, Golub 和 Van Loan 提出了奇异值分解(SVD)算法,并将这类设计矩阵带有误差的问题

命名为整体最小二乘方法 (total least square, TLS)^[2]。使用 SVD 解法虽能获得稳定数值解,但计算复杂度高^[3],如果设计矩阵中含有误差的元素重复出现,使用 SVD 解法,同一观测值在不同位置改正数将不一样。另外,使用 SVD 解法估计参数,难以给出以观测值表达的未知参数平差值表达式,从而无法利用协方差传播率进行精度评定^[4]。近些年,文献[4]提出一种顾及设计矩阵随机误差的最小二乘组合新解法,其将设计矩阵中所有含误差的元素作为虚拟观测值引入虚拟观测方程求解模型,解决了 TLS 方法的精度评定问题。加权整体最小二乘亦有较大进展^[5-10]。此外,文献[11]研究了三维坐标转换的通用整体最小二乘解法;文献[12]对部分变量误差模型提出了整体抗差最小二乘估计方法;文献[13]对 Partial EIV 模型提出了一种新解法;文献[14]提出了一种基于中位数法的抗差整体最小二乘估计方法。

AR 模型是一类基本的时间序列模型,在工程实践与导航定位等方面有着广泛应用^[15-22]。对于 t 阶 AR 模型,任意时刻观测值 z_m 为自身最近 t 阶滞后项的线性组合^[23],如下

$$\left. \begin{aligned} z_{t+1} &= \varphi_1 z_t + \varphi_2 z_{t-1} + \cdots + \varphi_t z_1 \\ z_{t+2} &= \varphi_1 z_{t+1} + \varphi_2 z_t + \cdots + \varphi_t z_2 \\ &\vdots \\ z_{t+n} &= \varphi_1 z_{t+n-1} + \varphi_2 z_{t+n-2} + \cdots + \varphi_t z_n \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式(1)用矩阵形式表达可写为

$$\mathbf{L} = \mathbf{B}\mathbf{X} \quad (2)$$

式中,观测向量 $\mathbf{L} = [z_{t+1} \ z_{t+2} \ \cdots \ z_{t+n}]^T$,令任意时刻观测值 z_i 的改正数为 v_i ;设计矩阵 $\mathbf{B} =$

$$\begin{bmatrix} z_t & z_{t-1} & \cdots & z_1 \\ z_{t+1} & z_t & \cdots & z_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{t+n-1} & z_{t+n-2} & \cdots & z_n \end{bmatrix}; \text{未知参数向量 } \mathbf{X} =$$

$$[\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_t]^T。$$

由此可见,含误差的观测值规律地出现在设计矩阵不同位置,且观测向量中元素亦重复出现在设计矩阵中。使用传统最小二乘方法估计 AR 模型参数,因忽略设计矩阵中存在含误差的元素而理论缺乏严密性。AR 模型中,观测向量误差

与设计矩阵误差同源,若使用 SVD 方法估计 AR 模型参数,则多次出现的同一观测值的改正数不再唯一。文献[24]提出一种非线性的 AR 模型整体最小二乘迭代算法,但难以应用协方差传播定律给出精度评定公式。

前述方法对求解 AR 模型存在一定缺陷,本文提出一种顾及设计矩阵误差,适用于 AR 模型的整体最小二乘新解法,该方法通过引入未在观测向量中出现且含误差的观测值作为虚拟观测值,将设计矩阵对应的改正数与未知参数初值乘积改写为由新设参数改正数及实际观测值改正数表达的线性组合,使得观测向量与设计矩阵中带误差的元素个数相同。由此将整体最小二乘问题转化为经典最小二乘问题,最终使用间接平差方法进行参数求解。本文方法有效地克服了 AR 模型中同一参数在不同位置改正数不一致的情况,并能依据协方差传播定律进行精度评定。

1 顾及设计矩阵误差的 AR 模型新解法

1.1 算法推导

同时考虑设计矩阵 \mathbf{B} 与观测向量 \mathbf{L} 误差,式(2)可写为

$$\mathbf{L} + \mathbf{v} = (\mathbf{B}_0 + \Delta\mathbf{B})(\mathbf{X}_0 + \mathbf{x}) = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{x} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (3)$$

忽略二阶小项 $\Delta\mathbf{B}\mathbf{x}$,式(3)可改写为

$$\mathbf{v} = \mathbf{B}_0\mathbf{X}_0 + \mathbf{B}_0\mathbf{x} + \Delta\mathbf{B}\mathbf{X}_0 - \mathbf{L} \quad (4)$$

式中, $\mathbf{v} = [v_{t+1} \ v_{t+2} \ \cdots \ v_{t+n}]^T$ 为观测向量 \mathbf{L} 改正数; $\mathbf{X}_0 = [\varphi_{1_0} \ \varphi_{2_0} \ \cdots \ \varphi_{t_0}]^T$,由待求参数初值组成, \mathbf{x} 为未知参数改正数; \mathbf{B}_0 由设计矩阵 \mathbf{B} 中各元素初值构成; $\Delta\mathbf{B} =$

$$\begin{bmatrix} v_t & v_{t-1} & \cdots & v_1 \\ v_{t+1} & v_t & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{t+n-1} & v_{t+n-2} & \cdots & v_n \end{bmatrix}, \text{由设计矩阵各元素}$$

改正数构成。

1.1.1 矩阵等价变换

矩阵 $\Delta\mathbf{B}$ 中改正数规律地重复出现,为将不同的改正数单独取出,同时考虑未在设计矩阵中出现的改正数 v_{t+n} ,将 $\Delta\mathbf{B}\mathbf{X}_0$ 作如式(5)所示等价变换

$$\Delta\mathbf{B}\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} v_t & v_{t-1} & \cdots & v_1 \\ v_{t+1} & v_t & \cdots & v_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{t+n-1} & v_{t+n-2} & \cdots & v_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{1_0} \\ \varphi_{2_0} \\ \vdots \\ \varphi_{t_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_t\varphi_{1_0} + v_{t-1}\varphi_{2_0} + \cdots + v_1\varphi_{t_0} \\ v_{t+1}\varphi_{1_0} + v_t\varphi_{2_0} + \cdots + v_2\varphi_{t_0} \\ \vdots \\ v_{t+n-1}\varphi_{1_0} + v_{t+n-2}\varphi_{2_0} + \cdots + v_n\varphi_{t_0} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{2_0} & \varphi_{1_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{2_0} & \varphi_{1_0} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{2_0} & \varphi_{1_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{1_0} & 0 \end{bmatrix}_{n \times (t+n)} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_t \\ v_{t+1} \\ v_{t+2} \\ \vdots \\ v_{t+n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

1.1.2 引入虚拟观测值

在 AR 模型中,观测向量 \boldsymbol{L} 中元素在设计矩阵 \boldsymbol{B} 中重复出现,两者相同元素改正数应一致。考虑到 \boldsymbol{B} 中的 $[z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_t]^T$ 未在 \boldsymbol{L} 中出现,为使观测向量 \boldsymbol{L} 与设计矩阵 \boldsymbol{B} 中带误差的元素个数相同,引入仅在设计矩阵 \boldsymbol{B} 中出现且带误差的元素作为虚拟观测值 \boldsymbol{L}_B ,即 $\boldsymbol{L}_B=[z_1 \ z_2 \ \cdots \ z_t]^T$ 。令 $\boldsymbol{x}_B=[v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_t]^T$,由此 $\Delta \boldsymbol{B} \boldsymbol{X}_0$ 可由 \boldsymbol{x}_B 与观测值改正数 \boldsymbol{v} 组成的列向量线性表示,即式(6)

$$\Delta \boldsymbol{B} \boldsymbol{X}_0 = [\boldsymbol{B}_{10} \ \boldsymbol{B}_{20}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix} \quad (6)$$

式中, $\boldsymbol{B}_{10} = \begin{bmatrix} \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{2_0} & \varphi_{1_0} \\ 0 & \varphi_{t_0} & \varphi_{(t-1)_0} & \cdots & \varphi_{2_0} \\ 0 & 0 & \varphi_{t_0} & \cdots & \varphi_{3_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{n \times t};$

$$\boldsymbol{B}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varphi_{1_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_{2_0} & \varphi_{1_0} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \varphi_{t_0} & \cdots & \varphi_{1_0} & 0 \end{bmatrix}_{n \times n},$$
 将式(6)结

果代入式(4)可得

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{X}_0 + \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_{10} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}_{20} \boldsymbol{v} - \boldsymbol{L} \quad (7)$$

1.1.3 函数模型构建

将式(7)中右边 $\boldsymbol{B}_{20} \boldsymbol{v}$ 项移至等式左边,提取公因式 \boldsymbol{v} 得 $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20}) \boldsymbol{v}$ 。由于矩阵 \boldsymbol{B}_{20} 中非零元素集中出现在主对角线下方,主对角线及其上方元素全为 0,故行列式 $|\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20}|$ 恒为 1,即矩阵 $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20}$ 可逆,从而可得式(8)

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} \boldsymbol{B}_{10} \boldsymbol{x}_B - (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{X}_0) \quad (8)$$

虚拟观测值误差方程为

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{x}_B \quad (9)$$

如果令

$$\boldsymbol{v}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_B \\ \boldsymbol{v} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{B}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E} \\ (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} \boldsymbol{B}_0 & (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} \boldsymbol{B}_{10} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_B \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{l}_g = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}_{20})^{-1} (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{X}_0) \end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{v}_g = \boldsymbol{B}_g \boldsymbol{x}_g - \boldsymbol{l}_g \quad (10)$$

式中, \boldsymbol{v}_g 为 $z_1, z_2, \cdots, z_t, z_{t+1}, \cdots, z_{t+n}$ 改正数构成的列向量; \boldsymbol{B}_g 为等效设计矩阵; \boldsymbol{x}_g 为所有实际待估参数的和虚拟参数的改正数。算法的估计准则为 $\boldsymbol{v}_g^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{v}_g = \min$, 由此整体最小二乘问题转化为经典最小二乘问题,从而可按经典平差中的间接平差方式求解。

1.2 解算流程

本文方法解算流程为:

- (1) 确定观测值及虚拟观测值初值,选用普通最小二乘所得的 AR 系数作为未知参数初值,即 $\boldsymbol{X}_0 = (\boldsymbol{B}_0^T \boldsymbol{B}_0)^{-1} \boldsymbol{B}_0^T \boldsymbol{L}$ 。
- (2) 按照式(10)所定义的各矩阵,将 AR 系数初值或更新值代入,构建等效设计矩阵 \boldsymbol{B}_g , 矩阵 \boldsymbol{l}_g , 按间接平差原理计算 $\boldsymbol{x}_g = (\boldsymbol{B}_g^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{B}_g)^{-1} \boldsymbol{B}_g^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{l}_g$, 同时更新未知参数 \boldsymbol{X} 。
- (3) 根据式(10)计算 \boldsymbol{v}_g , 更新实际观测值 \boldsymbol{L} 估值及虚拟观测值 \boldsymbol{L}_B 估值。
- (4) 重复步骤(2)、(3)直到未知参数改正数 x 小于一定阈值停止迭代,得到最终的未知参数结果。

1.3 精度评定

在经典最小二乘中,权由观测值精度确定,而观测值出现的次数,则会在平差过程中,通过对系数矩阵的作用,进一步影响法方程进而影响平差结果。但是在整体最小二乘中,系数矩阵中的观测值具有双重身份,除了影响系数矩阵本身外,还作为

观测值参与平差,本文认为观测值这部分影响与观测值在系数矩阵中出现的次数也有关系。本文所定义的权阵 \mathbf{P} 由两部分构成,即由观测值精度信息构建的权阵 \mathbf{P}' ,以及一个与次数有关的因子阵 \mathbf{K} ,其中 $\mathbf{P}=\mathbf{P}'\mathbf{K}$ 。为简化问题,本文先行假定 AR 模型各期观测值等精度,即 \mathbf{P}' 为单位阵, $\mathbf{P}=\mathbf{K}$,若观测值不等精度,则在按照精度信息得到的权阵 \mathbf{P}' 的基础上再乘以一个次数有关的因子阵 \mathbf{K} 。

由于在 AR 模型中,设计矩阵中元素在不同位置中规律地重复出现,观测值亦重复出现于设计矩阵中,在使用整体最小二乘方法进行求解未知参数时,实际上将同一观测值当作多次相同观测建模,为此,在各期观测值等精度的条件下,模型各观测值权可由观测值出现的次数确定,考虑引入虚拟观测值,该算法权阵 \mathbf{P} 定义如下

$$\mathbf{P}=\text{diag}(2,3,\cdots,t,t+1,\underbrace{t+1,\cdots,t+1}_{n-t-1},t+1,t,t-1,\cdots,2,1)$$

(11)

使用上述方法经过若干次迭代可以获得未知参数 \mathbf{X} 平差值,单位权中误差 σ 计算如式(12)所示

$$\sigma=\sqrt{\frac{\mathbf{v}_g^T\mathbf{P}\mathbf{v}_g}{f}}=\sqrt{\frac{\mathbf{v}_g^T\mathbf{P}\mathbf{v}_g}{n-t}}$$

(12)

式中,模型自由度 $f=(n+u)-(t+u)=n-t$ 。

在本文算法中,参数 $\mathbf{X}_0=[\varphi_{1_0} \ \varphi_{2_0} \ \cdots \ \varphi_{t_0}]^T$ 的初值为最小二乘所得到的 AR 系数。需要注意的是,若初值精度不够,则会导致迭代次数多,收敛速度慢,初值精度过差会导致迭代不能收敛。

2 算例分析

2.1 模拟数据

为验证算法的可行性与精度,依据式(13)模拟一个平稳的 AR(3)模型,其 AR 系数分别取为 $\varphi_1=0.8$ 、 $\varphi_2=-0.5$ 、 $\varphi_3=-0.3$,模拟数据如表 1 所示。

表 1 AR(3)模型模拟数据

Tab.1 Simulation date of AR(3) model

序号	模拟值	序号	模拟值	序号	模拟值
1	15.918 9	11	1.177 5	21	-2.857 4
2	14.797 4	12	-10.707 8	22	4.889 9
3	23.246 2	13	-13.858 2	23	7.621 5
4	7.357 2	14	-6.001 0	24	5.039 0
5	-10.805 2	15	5.460 1	25	0.607 8
6	-18.069 2	16	9.641 9	26	-6.357 2
7	-10.567 7	17	9.125 8	27	-5.792 5
8	2.792 3	18	-1.934 3	28	-1.301 2
9	14.679 2	19	-6.551 9	29	2.108 4
10	13.126 8	20	-9.401 7	30	5.830 8

$$z_t=\varphi_1z_{t-1}+\varphi_2z_{t-2}+\varphi_3z_{t-3}+e_t$$

(13)

式中, e_t 为高斯白噪声,表 1 模拟数据所附加噪声 $e_t\sim N(0,1)$ 。

对于表 1 模拟数据,分别采用本文方法(迭代阈值为 0.000 000 1)、SVD 方法以及直接最小二乘 3 种方法求解参数及单位权中误差,列于表 2。

表 2 3 种不同方法所求参数值及单位权中误差

Tab.2 The parameter value and the error of unit weight of three methods

参数	SVD	LS	本文方法	真值
φ_1	0.836 3	0.770 9	0.804 3	0.8
φ_2	-0.546 1	-0.466 7	-0.508 4	-0.5
φ_3	-0.272 5	-0.324 6	-0.306 8	-0.3
σ_0	1.445 5	1.416 0	0.904 2	

从表 2 可知,本文方法所得到的参数估值较 SVD 方法和传统最小二乘方法更接近于真值,由于考虑了设计矩阵误差及同一观测值出现在不同位置改正数应一致等事实,本文方法的单位权中误差明显小于最小二乘方法和 SVD 方法,并且更加接近虚拟观测噪声的中误差。当对模拟数据不附加高斯白噪声时,本文方法所得参数估值将与真值一致。

2.2 实测沉降数据

表 2 所示结果验证了算法的可行性与精度。为更好地验证本文算法可行性,采用文献[25]中例 3-7 实测沉降观测数据,该组实测沉降数据可用 AR(3)模型拟合,故对实测沉降数据建立 AR(3)模型, φ_1 、 φ_2 、 φ_3 为待求 AR 系数。在实测沉降数据中,本文算法所选用的参数初值 $\mathbf{X}_0=[\varphi_{1_0} \ \varphi_{2_0} \ \varphi_{3_0}]^T$ 为最小二乘方法所获得的 AR 系数,在获取参数初值之后,结合实测沉降观测值代入式(10),按照各矩阵定义构造模型,迭代求解以获得最终结果。

本文算法、普通最小二乘(LS)以及 SVD 3 种方法所得参数估值如表 3 所示。实测观测数据及 3 种方法所得平差值如表 4 所示。图 1 所示为本文算法、普通最小二乘(LS)以及 SVD 3 种方法平差结果与原始观测值残差绝对值对比。

表 3 中本文方法所求结果与 SVD 法较为接近,但本文方法所得单位权中误差小于 SVD 法,直接最小二乘结果与本文结果相差较远,查阅文献[23]知,本文所引用实测沉降数据并非平稳的自回归时间序列,这可能是和直接最小二乘结果

估值结果相差较大的原因。由表 4 及图 1 可知,本文方法所得观测值的平差值更契合原始观测序列变化趋势。新方法看起来误差相对平稳,波动小一些。第 14 期的结果,其他方法较差,新方法较好,说明新方法由于理论严密,所以对于抑制较大误差效果更好。

表 3 3 种方法所求沉降数据参数估值

Tab.3 The parameter value of observation data of settlement of three methods			
参数	SVD	LS	本文方法
φ_1	-0.374 8	0.041 1	-0.486 3
φ_2	0.289 8	0.327 8	0.426 4
φ_3	1.090 1	0.635 1	1.067 0
σ_0	0.895 4	0.767 3	0.732 0

表 4 沉降数据实测值及 3 种方法平差值

Tab.4 Adjustment of observation of three method and the original data				
mm				
序号	原始数据	本文方法	SVD	LS
1	26.33	—	—	—
2	26.27	—	—	—
3	26.43	—	—	—
4	25.56	26.235 2	26.412 1	26.418 6
5	26.82	26.339 8	26.719 1	26.397 2
6	26.56	26.435 0	26.169 1	26.265 4
7	25.93	26.368 6	25.683 3	26.115 2
8	26.43	26.553 1	27.217 7	26.804 3
9	26.52	26.536 7	26.564 2	26.453 2
10	25.46	26.552 5	25.988 6	26.220 7
11	26.12	26.734 7	26.957 1	26.524 2
12	27.28	26.635 3	26.500 6	26.261 0
13	26.67	26.778 2	25.101 6	25.851 8
14	27.95	26.860 6	26.385 9	26.626 2
15	26.74	26.775 4	26.994 0	27.215 5
16	27.53	27.004 5	27.153 4	27.198 0
17	25.31	26.944 8	27.902 1	27.646 6
18	26.90	26.980 6	27.644 0	27.046 0
19	28.09	27.182 1	27.265 8	26.885 3
20	26.78	27.035 7	24.860 6	26.045 5
21	28.66	27.231 0	27.429 8	27.391 6
22	26.75	27.288 6	27.642 8	27.795 1
23	27.24	27.187 6	27.475 4	27.501 0
24	28.02	27.469 7	28.787 6	28.088 9
25	26.81	27.350 9	26.555 2	27.068 6
26	28.50	27.421 2	27.768 9	27.585 8
27	27.68	27.637 4	27.635 1	27.753 9
28	26.57	27.435 5	27.113 2	27.505 8
29	28.36	27.700 8	29.133 9	28.264 6
30	27.94	27.716 4	27.247 4	27.453 6
31	26.81	27.606 6	26.713 5	27.318 2
32	28.50	27.949 7	28.966 7	28.270 8
33	27.68	27.752 6	27.547 9	27.703 1
34	26.57	27.877 6	27.113 2	27.505 8
35	28.36	28.098 9	29.133 9	28.264 6
36	27.94	27.834 2	27.247 4	27.453 6

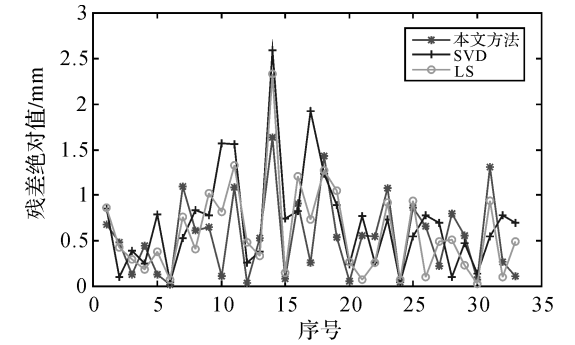


图 1 3 种方法平差结果与原始观测值比较

Fig.1 Comparative results between original data and adjustment of observation of three value

2.3 预报精度分析

AR 模型能利用前若干期观测值预报后若干期观测值,为检验本文算法的外符合精度,以表 4 所列前 30 期实测沉降观测值为基础,分别利用本文算法、普通最小二乘(LS)以及 SVD 3 种方法求解模型系数并预报第 31 期至 36 期沉降数据。依据前 30 期实测沉降数据所求参数结果及相应方法预报值如表 5 所示。图 2 所示为本文算法、普通最小二乘(LS)以及 SVD 3 种方法预报结果与实测沉降观测值残差绝对值对比。

表 5 3 种方法预报结果

Tab.5 Forecast result of three method				
项目	原始数据	本文方法	SVD	LS
φ_1	—	-0.528 0	-0.580 8	0.065 6
φ_2	—	0.487 7	0.423 5	0.410 5
φ_3	—	1.048 8	1.164 3	0.528 7
σ_0	—	0.700 1	1.036 2	0.809 1
第 31 期	26.81	27.986 5	28.476 0	28.001 6
第 32 期	28.50	28.237 0	29.218 1	27.980 1
第 33 期	27.68	27.717 6	26.538 5	27.817 0
第 34 期	26.57	28.489 7	30.116 2	28.114 7
第 35 期	28.36	28.091 4	27.767 3	28.056 0
第 36 期	27.94	28.133 5	27.526 9	28.088 1

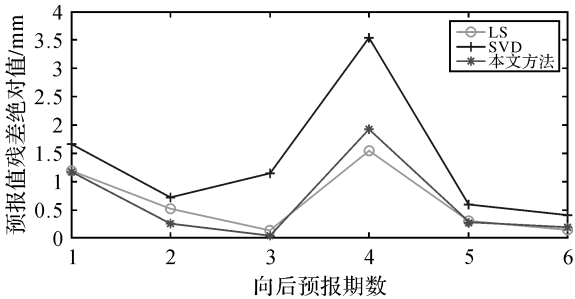


图 2 3 种方法预测结果与实测沉降观测值比较

Fig.2 Comparative results between original data and forecast result of observation of three value

由表 5 及图 2 可知,在第 31 期至 36 期数据中,由 SVD 方法所求参数的预测效果最差,本文算法整体上预测效果最优,在第 34 期预报中 3 种方法预测效果均差,可能是观测噪声较大所致。向后预报期数越小,本文算法所求系数的预报结果与普通最小二乘方法相比,更接近与实际观测值,而在较远期预报中,二者效果相当。总体而言,在本文算法、普通最小二乘 (LS) 以及 SVD 3 种方法中,本文算法的外符合精度最优。

3 结 语

在 AR 模型中,观测向量与设计矩阵的误差同源,观测值规律地重复出现在设计矩阵中,且设计矩阵中自身元素亦重复出现。传统最小二乘方法难以解决系数矩阵及观测值向量皆带误差的数据处理问题。本文提出了一种考虑设计矩阵误差的 AR 模型整体最小二乘新解法,引入仅在设计矩阵中出现且含误差的元素作为虚拟观测值,使观测向量与设计矩阵中带误差的元素个数相同。然后巧妙地对观测方程进行等价变换,实现了最小二乘框架下求解整体最小二乘问题,有效地克服了传统 SVD 方法的理论缺陷且能应用协方差传播定律给出未知参数的精度评定公式。最后通过对模拟数据及实测数据的验证,发现本文方法具有比 SVD 方法及经典最小二乘方法更高的精度及更优的外符合精度。

参考文献:

[1] ADCOCK R J. Note on the Method of Least Squares[J]. *Analyst*, 1877, 4(6): 183-184.

[2] GOLUB G H, VAN LOAN C F. An Analysis of the Total Least Squares Problem[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1980, 17(6): 883-893.

[3] VAN HUFFEL S, ZHA Hongyuan. An Efficient Total Least Squares Algorithm Based on a Rank-revealing Two-sided Orthogonal Decomposition[J]. *Numerical Algorithms*, 1993, 4(1): 101-133.

[4] 姚宜斌,孔建,顾及设计矩阵随机误差的最小二乘组合新解法[J]. *武汉大学学报(信息科学版)*, 2014, 39(9): 1028-1032.

YAO Yibin, KONG Jian. A New Combined LS Method Considering Random Errors of Design Matrix [J]. *Geomatics and Information Science of Wuhan University*, 2014, 39(9): 1028-1032.

[5] 曾文宪,方兴,刘经南,等.附有不等式约束的加权整体最小二乘算法[J]. *测绘学报*, 2014, 43(10): 1013-1018. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0173.

ZENG Wenxian, FANG Xing, LIU Jingnan, et al. Weighted Total Least Squares Algorithm with Inequality Constraints [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(10): 1013-1018. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0173.

[6] SCHAFFRIN B, WIESER A. On Weighted Total Least-squares Adjustment for Linear Regression[J]. *Journal of Geodesy*, 2008, 82(7): 415-421.

[7] SCHUERMANS M, MARKOVSKY I, VAN HUFFEL S. An Adapted Version of the Element-wise Weighted Total Least Squares Method for Applications in Chemometrics [J]. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, 2007, 85(1): 40-46.

[8] VAN HUFFEL S, VANDEWALLE J. Analysis and Properties of the Generalized Total Least Squares Problem $AX \approx B$ When Some or All Columns in A are Subject to Error [J]. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 1989, 10(3): 294-315.

[9] XU Peiliang, LIU Jingnan, SHI Chuang. Total Least Squares Adjustment in Partial Errors-in-variables Models: Algorithm and Statistical Analysis[J]. *Journal of Geodesy*, 2012, 86(8): 661-675.

[10] FANG X. Weighted Total Least Squares Solutions for Applications in Geodesy[D]. Hannover, Germany: Leibniz University, 2011.

[11] 方兴,曾文宪,刘经南,等.三维坐标转换的通用整体最小二乘算法[J]. *测绘学报*, 2014, 43(11): 1139-1143. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0193.

FANG Xing, ZENG Wenxian, LIU Jingnan, et al. A General Total Least Squares Algorithm for Three-dimensional Coordinate Transformations [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2014, 43(11): 1139-1143. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0193.

[12] 赵俊,归庆明.部分变量误差模型的整体抗差最小二乘估计[J]. *测绘学报*, 2016, 45(5): 552-559. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20150374.

ZHAO Jun, GUI Qingming. Total Robustified Least Squares Estimation in Partial Errors-in-variables Model [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(5): 552-559. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20150374.

[13] 王乐洋,余航,陈晓勇. Partial EIV 模型的解法[J]. *测绘学报*, 2016, 45(1): 22-29. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20140560.

WANG Leyang, YU Hang, CHEN Xiaoyong. An Algorithm for Partial EIV Model [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016, 45(1): 22-29. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20140560.

[14] 陶叶青,高井祥,姚一飞.基于中位数法的抗差总体最小二乘估计[J]. *测绘学报*, 2016, 45(3): 297-301. DOI: 10.11947/j. AGCS.2016.20150234.

TAO Yeqing, GAO Jingxiang, YAO Yifei. Solution for Robust Total Least Squares Estimation Based on Median Method [J]. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 2016,

- 45(3):297-301.DOI:10.11947/j.AGCS.2016.20150234.
- [15] 吴富梅,杨元喜.基于高阶 AR 模型的陀螺随机漂移模型[J].测绘学报,2007,36(4):389-394.
- WU Fumei, YANG Yuanxi. Gyroscope Random Drift Model Based on the Higher-order AR Model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2007, 36(4): 389-394.
- [16] 潘国荣,刘大杰.顾及邻近点变形因素项的动态模型辨识及预测[J].测绘学报,2001,30(1):32-35.
- PAN Guorong, LIU Dajie. Dynamic Modeling Identification and Predication in Consideration of the Adjacent Point Deformation[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2001, 30(1): 32-35.
- [17] 杨元喜,崔先强.动态定位有色噪声影响函数——以一阶 AR 模型为例[J].测绘学报,2003,32(1):6-10.
- YANG Yuanxi, CUI Xianqiang. Influence Functions of Colored Noises on Kinematic Positioning: Taking the AR Model of First Class as an Example[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2003, 32(1): 6-10.
- [18] 叶志伟,尹晖,张守建.AR 模型潜在超导重力数据信号检测中的分析研究[J].武汉大学学报(信息科学版),2007,32(6):536-539.
- YE Zhiwei, YIN Hui, ZHANG Shoujian. Using AR Model Spectrum Algorithms to Detect Superconducting Gravimetric Signals[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2007, 32(6): 536-539.
- [19] 张昊,王琪洁,朱建军,等.对钱德勒参数进行时变修正的 CLS+AR 模型在极移预测中的应用[J].武汉大学学报(信息科学版),2012,37(3):286-289.
- ZHANG Hao, WANG Qijie, ZHU Jianjun, et al. Application of CLS+AR Model Polar Motion to Prediction Based on Time-varying Parameters Correction of Chandler Wobble[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2012, 37(3): 286-289.
- [20] 王乐洋,许才军,鲁铁定.边长变化反演应变参数的总体最小二乘方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2010,35(2):181-184.
- WANG Leyang, XU Caijun, LU Tieding. Inversion of Strain Parameter Using Distance Changes Based on Total Least Squares[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2010, 35(2): 181-184.
- [21] 魏二虎,殷志祥,李广文,等.虚拟观测值法在三维坐标转换中的应用研究[J].武汉大学学报(信息科学版),2014,39(2):152-156.
- WEI Erhu, YIN Zhixiang, LI Guangwen, et al. On 3D Coordinate Transformations with Virtual Observation Method[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(2): 152-156.
- [22] 姚宜斌,黄书华,孔建,等.空间直线拟合的整体最小二乘算法[J].武汉大学学报(信息科学版),2014,39(5):571-574.
- YAO Yibin, HUANG Shuhua, KONG Jian, et al. Total Least Squares Algorithm for Fitting Spatial Straight Lines[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(5): 571-574.
- [23] CRYER J D, CHAN K S. 时间序列分析及应用[M]. 潘红宇,译.北京:机械工业出版社,2011.
- CRYER J D, CHAN K S. Time Series Analysis with Applications in R[M]. PAN Hongyu, tran. Beijing: China Machine Press, 2011.
- [24] 姚宜斌,黄书华,陈家君.求解自回归模型参数的整体最小二乘新方法[J].武汉大学学报(信息科学版),2014,39(12):1463-1466.
- YAO Yibin, HUANG Shuhua, CHEN Jiajun. A New Method of TLS to Solving the Autoregressive Model Parameter[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2014, 39(12): 1463-1466.
- [25] 王新洲,陶本藻,邱卫宁,等.高等测量平差[M].北京:测绘出版社,2013.
- WANG Xinzhou, TAO Benzao, QIU Weining, et al. Advanced Surveying Adjustment[M]. Beijing: Mapping Publishing Company, 2013.

(责任编辑:宋启凡)

收稿日期: 2017-01-03
修回日期: 2017-08-18
第一作者简介: 姚宜斌(1976—),男,教授,主要从事测量数据处理理论与方法、GNSS 空间环境学研究。
First author: YAO Yibin (1976—), male, professor, majors in geodetic data processing, GNSS space environment science, etc.
E-mail: ybyao@sgg.whu.edu.cn
通信作者: 熊朝晖
Corresponding author: XIONG Zhaohui
E-mail: cehui_xiong@whu.edu.cn