

引文格式:宗敬文,李厚朴,边少锋,等.常用地球半径差异符号表达式[J].测绘学报,2019,48(2):238-244. DOI:10.11947/j. AGCS. 2019.20180145.

ZONG Jingwen, LI Houpu, BIAN Shaofeng, et al. Symbolic expressions of differences between earth radius[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2019, 48(2): 238-244. DOI: 10.11947/j. AGCS. 2019.20180145.

## 常用地球半径差异符号表达式

宗敬文<sup>1</sup>, 李厚朴<sup>1</sup>, 边少锋<sup>1</sup>, 唐庆辉<sup>2</sup>

1. 海军工程大学导航工程系, 湖北 武汉 430033; 2. 32022 部队, 湖北 武汉 430033

## Symbolic expressions of differences between earth radius

ZONG Jingwen<sup>1</sup>, LI Houpu<sup>1</sup>, BIAN Shaofeng<sup>1</sup>, TANG Qinghui<sup>2</sup>

1. Department of Navigation, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China; 2. 32022 Troops, Wuhan 430033, China

**Abstract:** A systematic and comprehensive comparison of the five commonly used earth radius in geodesy and cartography is carried out, and the differences between the most common points of the earth's radius, their corresponding maximum values, and the latitudes of equal points between them are derived with the help of computer algebraic systems. The symbolic expressions are expressed as a power series of the first eccentricity. Taking the CGCS2000 ellipsoid as an example, the differences between the commonly used earth radii are clarified to numerical values. The results show that the difference between the commonly used Earth radii has a maximum at 90 degrees and a minimum at 0 degrees. The difference between the average radius of curvature and the equidistant sphere radius is the biggest, and the difference between the average radius of curvature and the average sphere radius is the smallest. These results can provide theoretical basis for relative research in earth science, space science, navigation and positioning.

**Key words:** earth radius; difference extrema value; extrema value point; symbolic expression; CGCS2000

**Foundation support:** The National Natural Science Foundation of China (Nos. 41571441; 41771487; 41631072)

**摘 要:**对测量和地球科学计算中 5 种常用地球半径进行了全面系统的比较,借助计算机代数系统推导出常用地球半径之间的差异最值点及其对应的最值和它们之间相等点大地纬度的符号表达式,并将其表示为偏心率  $e$  的幂级数形式,最后以 CGCS2000 椭球为例,将各个常用地球半径的差异明确到数值上。结果表明,常用地球半径之间差异在纬度为  $90^\circ$  时存在最大值,在纬度为  $0^\circ$  时存在最小值,平均曲率半径与等距离球半径间差异最大,平均曲率半径与平均球半径间差异最小。这些结果可为地球科学、空间科学、导航定位相关研究提供理论依据。

**关键词:**地球半径;差异最值;最值点;符号表达式;CGCS2000

**中图分类号:**P282      **文献标识码:**A      **文章编号:**1001-1595(2019)02-0238-07

**基金项目:**国家自然科学基金(41571441;41771487;41631072)

地球半径是测量和地球科学计算中最常用的基本参数,根据地球科学、空间科学、导航定位的要求和某些需求,常用到平均曲率半径、平均球半径、等距离球半径、等面积球半径和等体积球半径这 5 种地球半径<sup>[1-4]</sup>。随着空间技术和计算机技术在大地测量及地图学中的应用和发展,研究常用地球半径间的关系及它们之间的差异问题具有更加重要的实用价值。对于这一问题,国内外许多学者进行了研究,取得了显著成果。文献[5—6]提

出使用不同的球体半径表示球体特性,将不同球体半径代入克拉索夫斯基椭圆参数求得数值解,再代入球体面积公式,求得不同半径下大圆航线长度和角度变形大小,发现使用等角球半径计算大圆航线可以满足航海使用精度要求。文献[7]将子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径展为大地纬度的幂级数,并且借助辅助函数  $V$  导出了不同形式的平均曲率半径展开式。文献[8]中利用等距离球半径和等面积球半径,推导出常用纬度函数应用

于求解地图投影变换,提出了变系数线性插值方法,解决了测量和地图学中所要求的计算精度问题。文献[9]利用球体半径和计算机代数系统对大地测量学和地理信息系统中的问题进行了研究。

从目前来看,前人对这一领域作了很多卓有成效的工作,但主要是针对其中一种或几种地球半径进行计算和应用,多是对等角纬度、等面积纬度及等距离纬度的计算与分析<sup>[10-15]</sup>,很少有文献将这几种常用的地球半径间的差异在符号和数值上进行系统的比较。计算机代数系统可以将基本的数学公式展开成幂级数形式,推导出的公式相对于人工计算具有更高的精确度<sup>[16-19]</sup>。为丰富对这一问题的研究,使人们对这几种常用地球半径形成较直观的认识,本文着重研究了常用地球半径间的差异问题,推导出了常用地球半径间差异符号表达式,最后以 CGCS2000 参考椭球<sup>[20]</sup>为例,对常用地球半径间的差异进行了数值分析和比对,发现平均球半径和等体积球半径在等面积地图投影中可以对等面积球半径进行替换。

### 1 常用地球半径定义

平均曲率半径  $R_a$  常用于制作地球表面上局部地区地图<sup>[21]</sup>,也可以取制图区域中心点,记椭球偏心率为  $e$ ,则它关于大地纬度  $B$  的表达式

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}} \\ M &= \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}} \\ R_a &= \sqrt{MN} = \frac{a \sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2} \frac{1-\cos(2B)}{2} \end{aligned} \right\} (1)$$

式中,  $N$  为卯酉圈曲率半径;  $M$  为子午圈曲率半径,将其展开成偏心率  $e$  的幂级数形式

$$R_a = a(a_1 + a_2 \cos(2B) + a_3 \cos^2(2B) + a_4 \cos^3(2B) + a_5 \cos^4(2B)) \quad (2)$$

式(2)中的系数计算如下

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 - \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{8}e^6 - \frac{13}{128}e^8 \\ a_2 &= -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{32}e^8 \\ a_3 &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^6 + \frac{5}{32}e^8 \\ a_4 &= -\frac{1}{8}e^6 - \frac{3}{16}e^8 \\ a_5 &= \frac{1}{16}e^8 \end{aligned} \right\} (3)$$

就地球总体而言,平均球半径(取地球椭球三轴半轴长的算术平均值,用于简单决定球半径)<sup>[22]</sup>、等面积球半径(保持球体表面积等于地球椭球面相应全面积而决定的球半径,主要用于等面积投影)<sup>[23]</sup>、等距离球半径(使球面经线总长等于地球椭球面经线总长而决定的球半径,主要用于等距离投影中)<sup>[24]</sup>和等体积球半径(使地球球体的体积等于地球椭球体的体积来决定的球半径)的表达式与大地纬度  $B$  无关,只取决于地球椭球模型的参数  $a, e$ ,其表达式为

$$\left. \begin{aligned} R_e &= \frac{a(2 + \sqrt{(1-e^2)})}{3} \\ R_F &= a \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1-e^2}{4e} \ln \frac{1+e}{1-e}} \\ R_S &= a \left( 1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - \frac{175}{16384}e^8 \right) \\ R_V &= a(1-e^2)^{\frac{1}{6}} \end{aligned} \right\} (4)$$

式中,  $R_e$  表示平均球半径;  $R_F$  表示等面积球半径;  $R_S$  表示等距离球半径;  $R_V$  表示等体积半径。

### 2 常用地球半径间的差异符号表达式

由于 5 种常用地球半径具有一定差异,在实际应用中会用到它们的差值表达式。为了解常用地球半径间的差异情况,特别是差异最值点及其对应差异最值,可基于它们之间的差值表达式推导出其差异符号表达式。

#### 2.1 平均曲率半径与 4 种常用球体半径间的差异符号表达式

通过对平均曲率半径与 4 种常用球体半径的表达式进行分析,即可推算出其差异符号表达式。以平均球半径为例

$$R_a - R_e = \frac{a \sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2} \frac{1-\cos(2B)}{2} - \frac{a(2 + \sqrt{(1-e^2)})}{3} \quad (5)$$

将式(5)展开成幂级数的形式

$$R_a - R_e = a(a_1 + a_2 \cos(2B) + a_3 \cos^2(2B) + a_4 \cos^3(2B) + a_5 \cos^4(2B)) \quad (6)$$

式(6)中系数计算公式为

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{6}e^2 - \frac{1}{12}e^4 - \frac{5}{48}e^6 - \frac{17}{192}e^8 \\ a_2 &= -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{16}e^6 + \frac{1}{32}e^8 \\ a_3 &= \frac{1}{4}e^4 - \frac{1}{4}e^6 + \frac{5}{32}e^8 \\ a_4 &= -\frac{1}{8}e^6 - \frac{3}{16}e^8 \\ a_5 &= \frac{1}{16}e^8 \end{aligned} \right\} (7)$$

从上式中可以看出,在确定地球椭球体参考模型之后可以确定常数值  $e$ ,此时两者差值只与大地纬度  $B$  有关,由于大地纬度  $B$  的取值范围为

$(0, \frac{\pi}{2})$ ,因此  $\cos(2B)$  的取值范围为  $(-1, 1)$ ,即

当  $B$  取  $\frac{\pi}{2}$  时,两者差值存在最大值,为方便平均曲率半径与不同地球半径差异值的比较,将差异最大值进一步展开成偏心率  $e$  的幂级数形式

$$R_a - R_e = a \left( \frac{2}{3}e^2 + \frac{5}{12}e^4 + \frac{1}{3}e^6 + \frac{55}{192}e^8 \right) \quad (8)$$

当  $B$  取 0 时,存在最小值,将其最小值进一步展开成偏心率  $e$  的幂级数形式

$$R_a - R_e = a \left( \frac{1}{3}e^2 + \frac{1}{12}e^4 + \frac{1}{24}e^6 + \frac{5}{192}e^8 \right) \quad (9)$$

类似的,将平均曲率半径与等面积地球半径、等距离地球半径和等体积地球半径分别进行作差,分析结果同平均曲率半径与平均球半径差值

分析结果:当  $B$  取  $\frac{\pi}{2}$  时,两者差值存在最大值,最大值符号表达式结果列于表 1;当  $B$  取 0 时,两者差值存在最小值,差异最小值符号表达式结果列于表 2。

表 1 平均曲率半径与 4 种常用球体半径间差异最大值纬度符号表达式

Tab.1 The symbolic expressions of different max value between average radius of curvature and four common sphere radii

$\Delta R/a$	差异最大值点	差异最大值符号表达式
$(R_a - R_e)/a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}e^2 + \frac{5}{12}e^4 + \frac{1}{3}e^6 + \frac{55}{192}e^8$
$(R_a - R_F)/a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}e^2 + \frac{19}{45}e^4 + \frac{253}{756}e^6 + \frac{32\,453}{113\,400}e^8$
$(R_a - R_V)/a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}e^2 + \frac{4}{9}e^4 + \frac{115}{324}e^6 + \frac{295}{972}e^8$
$(R_a - R_S)/a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}e^2 + \frac{27}{64}e^4 + \frac{85}{256}e^6 + \frac{4655}{16\,384}e^8$

当平均曲率半径与平均球半径相等时,有如下公式

$$R_a - R_e = \frac{a \sqrt{(1-e^2)}}{1-e^2} \frac{1-\cos(2B)}{2} - \frac{a(2+\sqrt{(1-e^2)})}{3} = 0 \quad (10)$$

对式(10)进行整理,略去推导过程,可得

$$B_0^e = \frac{1}{2} \arccos \left( \frac{(4+e^2)\sqrt{1-e^2}-4+2e^2}{e^2(2+\sqrt{1-e^2})} \right) \quad (11)$$

式(11)中,  $B_0^e$  为平均曲率半径与平均球半径相等时的大地纬度,将其展开为偏心率  $e$  的幂级数形式

$$B_0^e = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{24}e^2 + \frac{247\sqrt{2}}{2304}e^4 + \frac{23\,119\sqrt{2}}{331\,776}e^6 + \frac{1\,076\,243\sqrt{2}}{21\,233\,664}e^8 \quad (12)$$

故采用与平均球半径类似的方法,推导出它们与平均曲率半径相等时大地纬度  $B$  的符号表达式,最后结果列于表 3。

表 2 平均曲率半径与 4 种常用球体半径间差异最小值纬度符号表达式

Tab.2 The symbolic expressions of different min value between average radius of curvature and four common sphere radii

$\Delta R/a$	差异最小值点	差异最小值符号表达式
$(R_a - R_e)/a$	0	$-\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{12}e^4 - \frac{1}{24}e^6 - \frac{5}{192}e^8$
$(R_a - R_F)/a$	0	$-\frac{1}{3}e^2 - \frac{7}{90}e^4 - \frac{61}{1512}e^6 - \frac{5969}{226\,800}e^8$
$(R_a - R_V)/a$	0	$-\frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{18}e^4 - \frac{13}{648}e^6 - \frac{35}{3888}e^8$
$(R_a - R_S)/a$	0	$-\frac{1}{4}e^2 - \frac{5}{64}e^4 - \frac{11}{256}e^6 - \frac{465}{16\,384}e^8$

表 3 平均曲率半径与 4 类地球半径相等时的大地纬度  $B$  符号表达式

Tab.3 The equal geodetic latitude symbolic expressions between average radius of curvature and four common sphere radii

$\Delta R$	大地纬度 $B$
$R_a - R_e$	$\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{5\sqrt{2}}{24}e^2 + \frac{247\sqrt{2}}{2304}e^4 + \frac{23\,119\sqrt{2}}{331\,776}e^6 + \frac{1\,076\,243\sqrt{2}}{21\,233\,664}e^8$
$R_a - R_F$	$\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10}e^2 + \frac{677\sqrt{2}}{12\,600}e^4 + \frac{13\,513\sqrt{2}}{378\,000}e^6 + \frac{91\,903\,369\sqrt{2}}{3\,492\,720\,000}e^8$
$R_a - R_V$	$\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{12}e^2 + \frac{37\sqrt{2}}{864}e^4 + \frac{97\sqrt{2}}{3456}e^6 + \frac{30\,731\sqrt{2}}{1\,492\,992}e^8$
$R_a - R_S$	$\frac{\pi}{6} + \frac{3\sqrt{2}}{32}e^2 + \frac{157\sqrt{2}}{3072}e^4 + \frac{413\sqrt{2}}{12\,288}e^6 + \frac{136\,333\sqrt{2}}{4\,718\,592}e^8$

### 2.2 4 种常用球体半径间的差异符号表达式

为系统地比较各常用球体半径之间的差异,除对平均曲率半径与 4 种常用球体半径间的差异进行分析以外,需要对其余 4 种常用球体半径间的差异进行分析。以下分别对平均球半径、等面积球半径、等距离球半径和等体积球半径间的差异进行分析。就地球总体而言,它们的表达式与大地纬度  $B$  无关,只取决于地球椭球模型参数  $a, e$ ,与推导平均曲率半径和 4 种常用球体半径间差异值符号表达式类似,通过作差之后级数展开的形式进行分析(以平均球半径和等体积球半径间差异值符号表达式为例),其差异可以表示为

$$R_e - R_V = \frac{a(2 + \sqrt{1 - e^2})}{3} - a(1 - e^2)^{\frac{1}{6}} \quad (13)$$

将式(13)展开成幂级数的形式

$$R_e - R_V = a \left( \frac{1}{36}e^4 + \frac{7}{324}e^6 + \frac{256}{15\,552}e^8 \right) \quad (14)$$

相对于平均曲率半径与其余 4 种常用球体半径间差异,它们相互之间的差异就显得相对简单。类似的,可以推导出平均球半径与等面积球半径、平均球半径与等距离球半径、等距离球半径与等面积球半径、等距离球半径与等体积球半径和等面积球半径与等体积球半径间的差异符号表达式,最后结果列于表 4。

表 4 4 种常用球体半径之间的差异符号表达式

Tab.4 The symbolic expressions of different extrema between four common sphere radii

$\Delta R/a$	差值符号表达式
$(R_e - R_V)/a$	$\frac{1}{36}e^4 + \frac{7}{324}e^6 + \frac{256}{15\,552}e^8$
$(R_F - R_V)/a$	$\frac{1}{45}e^4 + \frac{23}{1134}e^6 + \frac{5891}{340\,200}e^8$
$(R_e - R_F)/a$	$\frac{1}{180}e^4 + \frac{1}{756}e^6 - \frac{251}{907\,200}e^8$
$(R_F - R_S)/a$	$\frac{1}{12}e^2 - \frac{1}{2880}e^4 - \frac{127}{48\,384}e^6 - \frac{479\,119}{232\,243\,200}e^8$
$(R_e - R_S)/a$	$\frac{1}{12}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{768}e^6 - \frac{115}{49\,152}e^8$
$(R_S - R_V)/a$	$-\frac{1}{12}e^2 + \frac{13}{576}e^4 + \frac{475}{20\,736}e^6 + \frac{77\,155}{3\,981\,312}e^8$

表 5 平均曲率半径与各常用球体半径间的差异

Tab.5 The differences between average radius of curvature and four common sphere radius

$B$	$0^\circ$	$15^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$75^\circ$	$90^\circ$
$R_a - R_e$	-14 256.5	-11 404.6	-3 599.9	7 092.3	17 820.5	25 697.0	28 584.9
$R_a - R_F$	-14 254.9	-11 403.0	-3 598.4	7 093.9	17 822.1	25 698.6	28 586.4
$R_a - R_S$	-10 696.8	-7 844.9	-4 036.8	10 651.9	21 380.1	29 256.6	32 144.5
$R_a - R_V$	-14 248.5	-11 396.6	-3 592.0	7 100.2	17 828.5	25 705.0	28 592.8

由表 4 可以看出,4 种常用球体半径间的差异只与  $e$  有关,它们之间差异值随着  $e$  的增大而增大,且等距离球半径和等体积球半径之间的差异最小,平均球半径和等距离球半径之间的差异最大。

### 3 算例分析

为使人们对各地球半径间的差异在数值上有一个直观的认识,下面以 CGCS 2000 参考椭球 ( $a=6\,378\,137, e=0.081\,819\,191\,042\,8$ ) 为例,对 5 种常用地球半径间的差异进行数值比较与分析。

#### 3.1 平均曲率半径与 4 种常用球体半径间的差异比较

为了解平均曲率半径与平均球半径、等面积球半径、等距离球半径和等体积球半径间的差异,可以绘制大地纬度  $B \in [0^\circ, 90^\circ]$ ,平均曲率半径与各常用球体半径的差异曲线图,如图 1 所示;表 5 为大地纬度  $B \in [0^\circ, 90^\circ]$ ,每隔  $15^\circ$  对应的平均曲率半径与各常用球体半径间的差异。

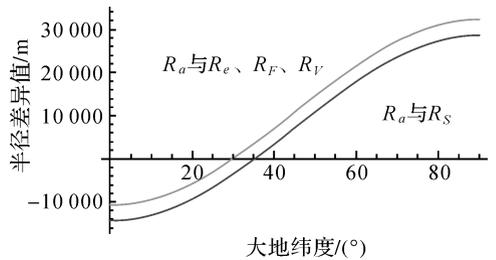


图 1 平均曲率半径与各常用地球半径的差异曲线图  
Fig.1 Chart of differences between average radius of curvature and four common sphere radii

如图 1、表 5 所示,平均曲率半径与其余 4 种常用球体半径之间差异值随着大地纬度  $B \in [0^\circ, 90^\circ]$  增大而增大,平均曲率半径与平均球半径、等面积球半径和等体积球半径差异值在所选取的 7 个点上差异很小,在图 1 上表现为 3 条曲线几乎重合成一条曲线。为了便于观察 3 条曲线之间的差异,取大地纬度  $B \in [0^\circ, 1^\circ]$  范围内,画出 3 条曲线,如图 2 所示。

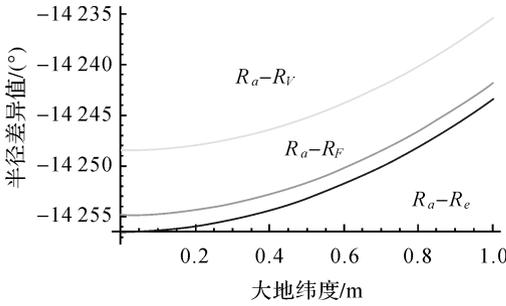


图2  $B \in [0^\circ, 1^\circ]$ 内平均曲率半径与各常用地球半径的差异曲线图

Fig.2 Chart of differences between average radius of curvature and four common sphere radii

由图2可以看出,在 $1^\circ$ 的变化范围内,平均曲率半径与平均球半径、等面积球半径和等体积球半径间差异的变化图,3条曲线的差异值在10 m以内,可以看出平均球半径、等面积球半径和等体积球半径间相差较小,因此,在实际应用中可以根据需要选择合适的半径以避免公式计算和推导过程中的复杂性。

根据已推导出的平均曲率半径与其余4种常用球体半径间的差异符号表达式,可以计算出在大地纬度 $B \in [0^\circ, 90^\circ]$ 范围内存在一个点使得两个半径相等,即差异值为0。

由图1和表6可以看出,差异曲线与坐标轴的

交点即平均曲率半径与平均球半径、等面积球半径、等距离球半径和等体积球半径相等的点,具体数值总结于表6。其中,等距离球半径和平均曲率半径相等点的大地纬度在 $30^\circ 3' 45.04''$ ,与其余3个相等点大地纬度相差 $5^\circ$ 左右,与图1反映的差异曲线相符。

由于平均曲率半径是随着大地纬度 $B$ 逐点变化的,是微观上的,而4种常用球体半径是宏观意义上地球球体的平均值,它们之间定义不同,差异逐点地变化,运用的场合也不同,因此宏观无法代替微观上地平均曲率半径,但在一定程度上,平均曲率半径与4种常用球体半径在某一个特殊点上相等,此时它们之间可以互相替代。

表6 平均曲率半径与4种常用球体半径间差异为0时的大地纬度 $B$

Tab.6 The point value of the differences is zero

大地 纬度	$R_a=R_e$	$R_a=R_f$	$R_a=R_s$	$R_a=R_v$
$B$	$35^\circ 19' 31.77''$	$35^\circ 19' 7.79''$	$30^\circ 3' 45.04''$	$35^\circ 19' 35.11''$

### 3.2 4种常用球体半径间的差异比较

为全面分析常用地球半径间的差异问题,现以CGCS2000参考椭球( $a = 6\,378\,137, e = 0.081\,819\,191\,0$ )为例,对4种常用球体半径间的差异进行数值比较与分析,最后结果列于表7中。

表7 4种常用球体半径之间的差异值

Tab.7 The value of different between four common sphere radius

m

	$R_e-R_v$	$R_e-R_s$	$R_e-R_f$	$R_f-R_s$	$R_f-R_v$	$R_s-R_v$
$\Delta R$	7.98	3 559.63	1.59	3 558.04	6.39	-3 551.64

由表7可以看出,平均球半径和等面积球半径之间的差异值的绝对值最小,平均球半径和等距离球半径之间的差异值绝对值最大。由于4种球体半径是不同意义上定义的球体半径平均值,因此,它们之间差异很大。等距离球半径与其余3种地球半径差异较大,因此在进行等距离投影时不宜使用其余地球半径进行替换;反观平均球半径和等体积球半径与等面积球半径之间,在CGCS2000参考系下数值相差精度在8 m以内,将平均球半径、等面积球半径和等体积球半径分别代入等面积投影长度比公式中,可以看出,椭球面在球面上的等面积投影的长度变形在赤道处最大,其值分别为 $\pm 0.111\,7\%$ 、 $\pm 0.111\,8\%$ 和 $\pm 0.111\,9\%$ ,由此可见,这3种地球半径对等面积投影的影响很小。由于等面积球半径公式较复

杂,对于复杂公式计算推导存在一定的困难,因此,在实际应用过程中可以用平均球半径和等体积球半径来替代等面积球半径。

## 4 结论

本文对5种常用地球半径间的差异进行了研究,推导出了常用地球半径间的差异符号表达式,并以CGCS2000椭球为例对它们进行了数值分析和比对,得出如下结论。

(1) 平均曲率半径与4种常用球体半径差异值随大地纬度的增大而增大,差异绝对值随大地纬度的增大先减小后增大,在某一个特定点处差异值为0。其中,当 $B$ 取 $\frac{\pi}{2}$ 时,存在差异最大值,平均曲率半径与等距离球半径间差异最大,差异

最大符号表达式的首项为 $\frac{3a}{4}e^2$ ;  $B$ 取0时,存在差异最小值,平均曲率半径与平均球半径间差异值最小,最小值符号表达式的首项为 $-\frac{a}{3}e^2$ 。

(2) 平均曲率半径是微观上的平均值,是随着大地纬度 $B$ 逐点变化的;4种常用球体半径是宏观意义上的地球球体上的平均值,与大地纬度 $B$ 无关。平均曲率半径与4种常用球体半径除在特殊点等价外,其余点无法进行相互代替应用。

(3) 4种常用球体半径间,平均球半径和等面积半径间的差异绝对值最小,绝对值最小符号表达式的首项为 $\frac{a}{180}e^4$ ;平均球半径和等距离半径之间的差异绝对值最大,绝对值最大值符号表达式的首项为 $\frac{a}{12}e^2$ 。等距离球半径与其余3种地球半径差异较大,不能相互替代;平均球半径和等体积球半径与等面积球半径之间差异较小,在实际应用过程中可以用平均球半径和等体积球半径来替代等面积球半径。

(4) 将常用地球半径间差异值表示为符号形式,并统一展开为偏心率 $e$ 的幂级数形式,该表达式易于比较分析,一定程度上丰富了测量及地图学数学分析理论。

## 参考文献:

[1] 吕志平, 张建军, 乔书波. 大地测量学基础[M]. 北京: 解放军出版社, 2005.  
LÜ Zhiping, ZHANG Jianjun, QIAO Shubo. Basis of geodesy [M]. Beijing: Publishing House of Liberation Army, 2005.

[2] 华棠. 海图数学基础[M]. 北京: 海潮出版社, 1985.  
HUA Tang. The mathematical basis of chart[M]. Beijing: Haichao Press, 1985.

[3] 王瑞, 李厚朴. 基于地球椭球模型的符号形式的航迹计算方法[J]. 测绘学报, 2010, 39(2): 151-155.  
WANG Rui, LI Houpu. Symbolic expressions of the track calculation methods based on the ellipsoidal model[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2010, 39(2): 151-155.

[4] 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京: 解放军出版社, 1988: 18-23.  
XIONG Jie. Ellipsoidal geodesy[M]. Beijing: Publishing House of Liberation Army, 1988: 18-23.

[5] 丁佳波. 拟大地线航法的球体半径[J]. 中国航海, 1988(1): 10-14.  
DING Jiabo. The spherical radius of the approximate geodetic line nautical method[J]. Navigation of China, 1988(1):

10-14.  
[6] 丁佳波. 拟大地线航法地理坐标的解算公式[J]. 天津航海, 2003(1): 4-6.  
DING Jiabo. Solving formula for the geographical coordinate of the geodesic line sailing[J]. Tianjin Navigation Aditorial Department, 2003(1): 4-6.

[7] 熊介. 椭球面曲率半径展为纬差的幂级数[J]. 解放军测绘学院学报, 1985(2): 15-21.  
XIONG Jie. Expansions of radius of curvature of the ellipsoid in power series of latitude difference[J]. Journal of the PLA Institute of Surveying and Mapping, 1985(2): 15-21.

[8] 杨启和, 杨晓梅. 测量和地图学中应用的三种纬度函数及其反解变换的线性插值方法[J]. 测绘学报, 1997, 26(1): 92-94.  
YANG Qihe, YANG Xiaomei. Three types of latitudinal function and linear interpolation algorithms used in surveying and cartography[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 1997, 26(1): 92-94.

[9] AWANGE J L, GRAFAREND E W. Solving algebraic computational problems in geodesy and geoinformatics: the answer to modern challenges[M]. Berlin: Springer, 2005.

[10] ADAMS O S. Latitude developments connected with geodesy and cartography with tables, including a table for lambert equal-area meridional projection[M]. Washington, DC: Government Printing Office, 1921.

[11] SNYDER J P. Map projections-a working manual[M]. Washington, DC: Government Printing Office, 1987.

[12] 杨启和. 地图投影变换原理与方法[M]. 北京: 解放军出版社, 1989.  
YANG Qihe. The theory and method of map projection [M]. Beijing: PLA Press, 1989.

[13] YANG Qihe, SNYDER J P, TOBLER W R. Map projection transformation: principles and applications[M]. London: Taylor & Francis, 2000.

[14] 吴忠性, 杨启和. 数学制图学原理[M]. 北京: 测绘出版社, 1989.  
WU Zhongxing, YANG Qihe. Principle of mathematical cartography [M]. Beijing: Surveying and Mapping Press, 1989.

[15] 李忠美, 李厚朴, 边少锋. 常用纬度差异极值符号表达式[J]. 测绘学报, 2014, 43(2): 214-220. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0031.  
LI Zhongmei, LI Houpu, BIAN Shaofeng. Symbolic expressions of difference extrema between regular latitudes[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2014, 43(2): 214-220. DOI: 10.13485/j.cnki.11-2089.2014.0031.

[16] 边少锋, 李厚朴, 李忠美. 地图投影计算机代数分析研究进展[J]. 测绘学报, 2017, 46(10): 1557-1569. DOI: 10.11947/j.AGCS.2017.20170396.  
BIAN Shaofeng, LI Houpu, LI Zhongmei. Research progress in mathematical analysis of map projection by computer

- algebra[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2017, 46(10): 1557-1569. DOI: 10.11947/j. AGCS. 2017.20170396.
- [17] 李厚朴, 边少锋, 钟斌. 地理坐标系计算机代数精密分析理论[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015.  
LI Houpu, BIAN Shaofeng, ZHONG Bin. Geographic coordinate system computer algebraic precision analysis theory[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015.
- [18] 边少锋, 许江宁. 计算机代数系统与大地测量数学分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2004.  
BIAN Shaofeng, XU Jiangning. Computer algebra system and mathematical analysis in geodesy [M]. Beijing: National Defend Industry Press, 2004.
- [19] 边少锋, 陈良友, 纪兵. Mathematica 软件在大地测量中的应用[J]. 测绘科学与工, 2004, 24(2): 25-28.  
BIAN Shaofeng, CHEN Liangyou, JI Bing. Applications of mathematica system in geodesy[J]. Geomatic Science and Engineering, 2004, 24(2): 25-28.
- [20] 陈俊勇. 中国现代大地基准——中国大地坐标系 2000 (CGCS 2000) 及其框架[J]. 测绘学报, 2008, 37(3): 269-271. DOI: 10.3321/j.issn:1001-1595.2008.03.001.  
CHEN Junyong. Chinese modern geodetic datum—Chinese Geodetic Coordinate System 2000 (CGCS 2000) and its frame[J]. Acta Geodaetica et Cartographica Sinica, 2008, 37(3): 269-271. DOI: 10.3321/j.issn:1001-1595. 2008.03.001.
- [21] 陈武军. 地球曲率半径取值精度对控制测量精度的影响分析[J]. 地矿测绘, 2012, 28(4): 27-28, 31.  
CHEN Wujun. Analysis of the influence earth curvature radius value precision to control survey precision [J]. Surveying and Mapping of Geology and Mineral Resources, 2012, 28(4): 27-28, 31.
- [22] 陈丽华, 汪孔政. 关于参考椭球平均半径的探讨[J]. 测绘通报, 2000(10): 15, 17.  
CHEN Lihua, WANG Kongzheng. On mean radius of reference Ellipsoid[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2000 (10): 15, 17.
- [23] 李厚朴, 边少锋, 陈良友. 等面积纬度函数和等量纬度变换的直接解算公式[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2011, 36(7): 843-846.  
LI Houpu, BIAN Shaofeng, CHEN Liangyou. The direct calculating formulae for transformations between authalic latitude function and isometric latitude[J]. Geomatics and Information Science of Wuhan University, 2011, 36(7): 843-846.
- [24] 陈成, 金立新, 李厚朴, 等. 等距离球面高斯投影[J]. 测绘通报, 2017(10): 1-6. DOI: 10.13474/j.cnki.11-2246. 2017.0306.  
CHEN Cheng, JIN Lixin, LI Houpu, et al. A kind of gauss projection based on the equidistant sphere[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 2017(10): 1-6. DOI: 10.13474/j.cnki.11-2246.2017.0306.

(责任编辑:陈品馨)

收稿日期: 2018-04-10

修回日期: 2018-09-21

第一作者简介: 宗敬文(1995—), 男, 博士生, 研究方向为大地测量。

First author: ZONG Jingwen(1995—), male, PhD candidate, majors in geodetic surveying.

E-mail: zjw19950613@163.com

通信作者: 李厚朴

Corresponding author: LI Houpu

E-mail: lihoup1985@126.com